د. مصطفى حركات

اللسانيات الرياضية والعروض

طريق المطار - شارع مدرسة القتال
بناية حلمي عويدات - تلفون
٨٣٣٩٨٩ - ص.ب. ١٤/٥٦٣٦
الطبعة الأولى ١٩٨٨

مدخل إلى علم اللّغة الرّياضي

المفاهيم التي نوردها هنا تكاد تكون الآن مفاهيم كلاسيكية، ولكن على المستوى الدولي. أما على مستوى الثقافة العربية فإنها لم تعالج حتى الآن، ولم يؤلف فيها المؤلفون.

I المفهوم الشكلي للكلمة واللغة

1 الكلمة الشكلية:

نأخذ مجموعة ق غير خالية. نسمي ق ألفباء، ونسمي عناصرها حروفاً. كل سلسلة منتهية من العناصر التي تنتمي الى ق تسمى: **كلمة شكلية أو باختصار كلمة**.

مثال: ق تحتوي على العناصر التالية، أ، ب، جـ، «أأ ب جـ جـ جـ». كلمة يظهر فيها العنصر أ مرتين في الرتبة الأولى والثانية، ويظهر فيها العنصر ب مرة في الرتبة الثالثة، ويظهر فيها العنصر جـ ثلاث مرات في الرتبة الرابعة والخامسة والسادسة.

الكلمة الفارغة: هي السلسلة التي لا تحتوي على أي عنصر، سنرمز بالرمز ω للكلمة الفارغة.

عدد ظهور عنصر في الكلمة يسمى درجة هذه الكلمة بالنسبة لهذا العنصر. درجة الكلمة: «أأ ب ب جـ» بالنسبة للعنصر أ يساوي 2 درجة هذه الكلمة بالنسبة للعنصر ب يساوي 2.

درجة هذه الكلمة بالنسبة للعناصر أ، ب، جـ تساوي 2 + 2 + 1 أي 5.

درجة الكلمة بالنسبة لكل العناصر التي تظهر فيها تسمى **طول الكلمة**. فطول الكلمة «طاووس» مثلاً يساوي 5.

ملاحظة: إن شكل الحرف العربي يتغير حسب موضعه في الكلمة. ولكننا في جل الأحيان لن نأخذ بعين الاعتبار رسم الحرف فإننا لن نفرق مثلاً بين: عـ، ع، ـعـ، ـع كما أننا لن نهتم في هذا الباب بقراءة الكلمة. فإننا لا ننظر إلى الكلمة إلا كتسلسل حروف فعندما نكتب: «علم» فإننا لن نحاول أن نعرف هل هي تمثل «عَلِمَ» أو «عِلْمٌ» أو «عَلَّمَ».

2 عملية الإضافة:

إذا كانت ك$_1$ ، ك$_2$ كلمتين فإنه يمكننا الحصول على كلمة جديدة نرمز إليها بالرمز: ك$_1$ ك$_2$ وذلك باضافة الكلمة ك$_1$ الى الكلمة ك$_2$ فمثلاً: ك$_1$ = أن، ك$_2$ = قاد فإن ك$_1$ ك$_2$ = أنقاد.

إذا كانت ق ألفباء فإننا نرمز لمجموعة الكلمات التي نكونها بواسطة حروف ق بالرمز ق*.

مثال: ق = {أ، ب} فق* = {ω، أ، ب، أأ، أب، ب أ، ب ب، أأأ، أأب، . . .}

إن عملية الاضافة عملية داخلية في المجموعة ق*.

وهذه العملية تجميعية أي أن: (ك$_1$ ك$_2$) ك$_3$ = ك$_1$ (ك$_2$ ك$_3$).

والكلمة الفارغة ω عنصر محايد أي أن ω ك = ك ω = ك.

إن ق* مقرونة بعملية الاضافة نصف زمرة.

3 مفهوم اللغة:

نسمي لغة معرفة على الألفباء ق كل مجموعة من الكلمات التي تنتمي حروفها إلى ق فقط.

أمثلة: إذا كانت ق = {أ، م، س} فإن مجموعة الكلمات: {اسم، أمس، تماس، سام، ساس، أساس، إمام، ماما، سمسم}. لغة معرفة على ألفباء ق.

إذا كانت ق = {أ، د، ر} فإن مجموعة الكلمات التي طولها عدد فردي لغة على ق.

هذه المجموعة هي: {أ، د، ر، أأأ، أأد، أأر، دار، درأ، . . .}

إذا كانت ق هي ألفباء فاللغة المعرفة على ق ما هي إلا مجموعة جزئية من نصف الزمرة ق*.

4 العمليات على اللغات:

إذا كانت ك$_1$ لغة على ألفباء ق، ك$_2$ لغة أخرى على ق

فإن مجموعة الكلمات التي تنتمي إلى ك$_1$ أو ك$_2$ هي لغة على ق تسمى اتحاد ك$_1$، ك$_2$.

مجموعة الكلمات المشتركة بين ك$_1$، ك$_2$ تسمى تقاطع اللغتين ك$_1$، ك$_2$.

مثال: ق = { أ، م، س }.

ك$_1$ = { أم، اس، ماس }.

ك$_2$ = { سم، اس، أساس، ماس }.

إن اتحاد كل من ك$_1$، ك$_2$ يساوي اللغة: { أم، اس، سم، ماس، أساس}

إن تقاطع كل من ك$_1$، ك$_2$ هو اللغة: { أس، ماس }.

إذا كان ك$_1$، ك$_2$ لغتين على نفس ألفباء فإنه يمكننا تعريف لغة ثالثة نرمز لها بالرمز ك$_1$، ك$_2$ بإضافة كل كلمة من ك$_2$ إلى كلمة من ك$_1$. نسمي ك$_1$ك$_2$ جداء كل من ك$_1$، ك$_2$.

أمثلة: ك$_1$ = { است، انـ، تـ }.

ك$_2$ = { فـتـح، قطع }.

فإن ك$_1$ك$_2$ هي اللغة «استفتح، انفتح، تفتح، استقطع، انقطع، تقطع }.

إذا كانت ڡ = {أ، ر، د } و { أ} هي اللغة التي تحتوي على الكلمة الواحدة: أ فإن { أ } ڡ هي اللغة: { أ، أأ، أر، أد، أأأ، أأر، أأد، ...... }.

أي أن { أ }. ڡ هي مجموعة الكلمات التي تبتديء بالحرف أ.

5 اللغة المرآة:

إذا قلبنا ترتيب حروف الكلمة «سلم» فإننا نحصل على الكلمة «ملس». نقول أن الكلمة ملس صورة الكلمة سلم في مرآة.

إن صورة الكلمة «مطال» في مرآة هي «لا طم» وصورة الكلمة «مطلع» هي الكلمة «علطم».

إذا كانت ك كلمة فإننا نرمز بالرمز كَ لصورتها في مرآة.

إن ك، كَ لهما نفس الدرجة بالنسبة لحرف أو مجموعة من الحروف.
لننظر الآن إلى مقلوب الكلمة: «ساس». إنه «ساس» نفسه.
نقول أن الكلمة: «ساس» كلمة متناظرة.

> نقول عن كلمة ك أنها متناظرة إذا كانت تساوي صورتها كَ في مرآة.

صورة الكلمة «تسلسل» في مرآة هي الكلمة «لسلست»، وصورة الكلمة «لسلست» في مرآة هي «تسلسل».

إذا كانت ك كلمة صورتها في مرآة الكلمة كَ فإن كَ̄ = ك.

إذا كانت ك لغة فإنه يمكننا تعريف لغة جديدة نرمز لها بالرمز كَ، بحيث تكون كلمات كَ هي صورة كلمات ك في مرآة.
فمثلاً: ك = { اسم، أمس، ماس، ساس، ساسا، أساس، مماس، امام، ماما، سمسم }.
وكَ = { مسا، سما، سام، ماس، ساس، ساسا، سامم، ماما، امام، مسمسم }.

6 بعض المصطلحات:

عندما يكون الألفباء ڡ مجموعة من الكلمات فإننا نسمي ڡ قاموسا.
كل سلسلة من عناصر ڡ تسمى جملة. كل مجموعة من الجمل تسمى لغة.

مثال: ڡ = { كسر، الكأس، محمد }.

«كسر الكأس كسر كسر» جملة طولها أربعة.

مجموعة الكلمات: «كسر الكأس، كسر محمد الكأس كسر الكأس،

كسر محمد» لغة معرفة على القاموس ق. والمجموعة { محمد الكاس، الكأس كسر الكاس } أيضا لغة.

ملاحظة:

1) مفهوم اللغة هنا مفهوم شكلي فإننا لا نشترط في الجملة أن تكون مفيدة.

2) لا نهتم في هذا الباب بتشكيل الكلمات.

II حساب الكلمات

1 علاقات «تو» (THUE)

اذا عوضنا في كلمة «غابر» الجزء «اب» بالكلمة «رو» فإننا نحصل على الكلمة: «غرور».نفرض أن الكلمة ك تحتوي على الكلمة «ط».انه يمكننا كتابة ك على الشكل: ك = س ط ع حيث س، ع كلمتين.من الممكن لكل من س، ع أن يساوي الكلمة الفارغة.

اذا عوضنا الكلمة ط بالكلمة د فاننا نحصل على الكلمة س، د، ع نقول ان ط تكافىء د ونكتب: ط ~ د.

في المثال السابق من الممكن اعطاء عدة علاقات تكافؤ.

مثلا: «أب» ~ «رو» «غر» ~ «جاس»

اذا نتجت الكلمة لـ عن الكلمة ك بتعويض واحد نقول: إن ك، لـ كلمتين متاخمتين.

إن كلمة «عابس» متاخمة لكلمة «عروس»،
وكلمة «عروس» متاخمة لكلمة «جاسوس»،
بينما كلمة «عابس» ليست متاخمة لكلمة «جاسوس».

تسمى العلاقات التي تعطي في البدء علاقات تو «تو عالم رياضي نرفيجي)

تعريف: ـ لدينا ألفباء △ ونظام علاقات «تو».
نعرف علاقة في المجموعة △* بالطريقة الآتية: ـ

إذا كانت ں، ك كلمتين فإن ں ≈ ك إذا وفقط إذا وجدت متتالية من الكلمات: س$_1$، س$_2$، ... س$_م$ بحيث تكون ں متاخمة لـ س$_1$، س متاخمة لـ س$_2$، س$_م$ متاخمة لـ ك.

في المثال السابق لدينا عابس متاخمة لعروس وعروس متاخمة لجاسوس إذن عابس ≈ جاسوس.

نظرية: ـ «العلاقة ≈ علاقة تكافؤ»

البرهان بسيط فيما سيأتي إذا كانت لدينا ں ≈ ك فإننا سنقول أن ں، ك متكافئتان.

2 مشكل الكلمة:

إذا كان لدينا ألفباء △ ونظام علاقات «تو» وكانت ں، ك كلمتين من △* فهل يمكن أن نعرف أن ں، ك كلمتان متكافئتان أم لا؟

في بعض الأحيان نستطيع أن نجيب وفي بعض الحالات لن نستطيع الاجابة.

مثال[1]: △ = { أ، ب }، أأ ~ ω، ب ب ≈ ω.

الكلمة: «أأأب أ» تكافىء الكلمة «أأأب ب ب أ»

نقول أن «أأأب أ» اختزال للكلمة «أأأب ب ب أ».

نفرض أن ك = «أأأب أأأأأ ب ب أاب ب ب»

فبطرق عدة نتوصل الى الكلمة «أب أب» وهذه الكلمة غير قابلة للاختزال.

إذا كانت ك$_1$، ك$_2$ كلمتين لكي نتحقق من أن ك$_1$ تكافىء ك$_2$ أو لا تكافئها فإننا نختزل ك$_1$، ك$_2$ فإذا وصلنا الى كلمة واحدة غير قابلة للاختزال فإن ك$_1$ ≈ ك$_2$ وإلا فلا.

مثال[2]: △ = { أ، ب }، أب أ ~ أأ، ب أب ~ ب ب.

«أب أب أ» ≈ «أب أأ» لأن الأولى تكتب «أب أب أ» والثانية تكتب «أب أأ»، فاذا عوضنا في «أب أب أ» الجزء الأول «أب أ» بالكلمة «أأ» نجد أن اختزالاً لهذه الكلمة هو «أأأ» واذا عوضنا في «أب أب أ» الجزء ب أب بالكلمة «ب ب» نجد «أب ب أ» وهذه الكلمة غير قابلة للاختزال.

في هذا النظام لا يمكننا أن نطبق القاعدة السابقة لأننا وجدنا كلمتين متكافئتين تكافئان كلمتين مختلفتين غير قابلتين للاختزال.

3 مجموعة الأصناف: ـ

لنفرض أن △ = { أ، ب }، أأ ~ ω، ب ب ≈ ω.

لدينا الكلمات ں$_1$ = «أأب أ»

ك$_1$ = «ب أب ب»

ں$_2$ = «أأأب أ»

ك$_2$ = «أب أب ب»

إن ں$_1$ ≈ ك$_1$، ں$_2$ ≈ ك$_2$ هل ں$_1$ں$_2$ ≈ ك$_1$ك$_2$.

إن: ں$_1$ں$_2$ = «أأب أأأأب أ» وهي تكافىء «أ».

ك$_1$ك$_2$ = «ب أب ب أب أب ب» وهي تكافىء «أ».

ں$_1$ں$_2$ تكافىء ك$_1$ك$_2$.

وهذه النتيجة عامة ويمكن البرهنة بسهولة على النظرية الآتية: ـ

نظرية: - إذا كان لدينا ألفباء ونظام علاقات «تو» فإن ن$_1$ ≈ ك ق$_2$ ≈ ك$_2$ تستلزم ن$_1$ ن$_2$ ≈ ك$_1$ك$_2$.

نقول ان علاقة التكافؤ السابقة متلائمة مع قانون الاضافة اذا رمزنا بالرمز ن̅$_1$ الى صنف تكافؤ ن$_1$ (أي مجموعة العناصر التي تكافىء ن$_1$) وبالرمز ن̅$_2$ الى صنف تكافؤ ن$_2$ فانه يمكن لنا تعريف اضافة الصنفين ن̅$_1$، ن̅$_2$ بأنه ن$_1$ن$_2$ (بخط فوقها).

مثال: - △ = { أ، ب }، أأ ~ ω ، ب ب ~ ω .

سنأخذ كممثل لكل صنف تكافؤ الكلمة الغير القابلة للاختزال من هذا الصنف نجد أن الأصناف هي أصناف العناصر التالية: -

ω ، «أ»، «ب»، «أب»، «ب أ»، «أب أ»، «ب أب»، «أب أب»، . . .

فمثلاً لايجاد جداء الصنفين أب أ، أب أب نضيف «أب أب» للكلمة «أب أ» فنجد «أب أأب أب» ~ «ب».

ومنه فإن أب أ. أب أب = ب.

إذا أخذنا أي عنصر ينتمي الى أب أ وأي عنصر ينتمي الى أب أب فإن جداءهما سينتمي الى ب، وينتج هذا عن النظرية السابقة.

III الأنظمة التوافقية

1 الانتاج: -

فيما سبق، عند دراسة حساب الكلمات، تطرقنا الى علاقات «تو» ولم نكن مهتمين بالاتجاه، سندخل الآن في قواعدنا بصفة مستمرة الاتجاه.

نفرض أن لدينا ألفباء «△» نعرّف نظاماً توافقياً بواسطة أزواج من الكلمات: (ك، كَ)، مكتوبة بواسطة حروف △ .

إذا كانت ن كلمة تحتوي على الكلمة كـ فإنه يمكننا أن نكتب ن على الشكل ن = س كـ ص: حيث س ص كلمتان من △*.

إذا عوضنا كـ بالكلمة كَـ في ن فإننا نحصل على الكلمة: ن̅ = س كَـ ص.

مثال: - △ هي مجموعة الحروف العربية كـ = جا
كَـ = و

إذا كانت ق = مجال فإن ق̅ = مول

نقول ان الزوج (كـ، كَـ) يحدد «مخطط إنتاج»، ونرمز بالكتابة الآتية: س كـ ص ← س كَـ ص الى الانتاج الذي يعرفه الزوج (كـ، كَـ) بواسطة س، ص.

ونقول أيضاً: ان الكلمة ن̅ = س كَـ ص هي نتيجة الكلمة ن = س كـ ص

2 النظام التوافقي:

يعرف النظام التوافقي بالمعطيات الآتية: ـ

1ـ ألفباء △ منته نسميه ألفباء النظام وأحياناً نضيف الى هذا الألفباء «ألفباء مساعداً △».

2ـ كلمة خاصة تسمى بديهية النظام.

3ـ عدد منته من مخططات انتاجية.

3 أمثلة عن الأنظمة التوافقية:

المثال 1:

ألفباء النظام هو: △ = {أ، ب}

الألفباء المساعد هو △′ = {هـ}.

البديهية هي الكلمة «هـ».

الانتاجات هي: ـ

هـ ← أ ب (1)

هـ ← أ هـ ب (2)

تنتج الكلمة «أهـب» عن الكلمة «هـ» بواسطة القاعدة (2).

وتنتج عن «أهـب» الكلمة «أأهـب ب» بواسطة القاعدة (2).

وتنتج عن «أأهـب ب» الكلمة «أأأب ب ب» بواسطة القاعدة (1).

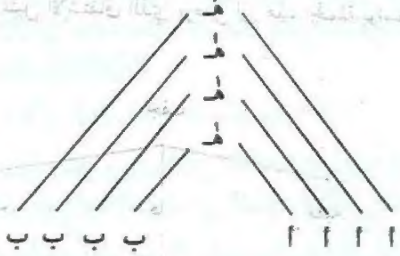
نلاحظ أن الكلمة «أأأب ب ب» مكونة من عناصر △ فقط وأنه لا يمكن أن نستنتج أو نشتق منها كلمة أخرى.

الكلمة «أأأب ب ب» تسمى نظرية نهائية.

كل كلمة تستنتج من البديهية تسمى نظرية.

السلسلة «هـ»، «أب»، «أهـب»، «أهـب ب»، «أأأب ب ب» حيث كل كلمة ناتجة عن سابقتها بواسطة تعويض عن التعويضين (1) (2) تسمى برهاناً أو اشتقاقاً.

يمكن تمثيل الاشتقاقات المتعددة بواسطة بيان نسميه شجرة.



المثال 2: ـ

قاموس النظام هو المجموعة: {عمرا، زيد، ضرب}.

القاموس المساعد هو: {جف، ف، فا، مفبه}

يشير الرمز جف الى الجملة الفعلية.

يشير الرمز ف الى الفعل.

يشير الرمز فا الى الفاعل.

يشير الرمز مفبه الى المفعول به.

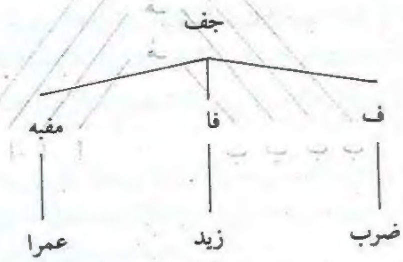
بديهية النظام هي جف.

قواعد الانتاج هي:

جف ← ف فا مفبه
ف ← ضرب
فا ← زيد
مفبه ← عمرا

فهذا النظام يولد الجملة الآتية: ـ ضرب زيد عمرا

يمكن تمثيل الاشتقاق الذي يوصل الى هذه الجملة بواسطة الشجرة الآتية:



4 القانون الثنائي.

مفهوم القانون (CODE) اذا كانت ف$_1$ ألفباء، ف$_2$ ألفباء فإننا نسمي تقنين CODAGE كل تشاكل متباين من ف$_2$ نحو ف$_1^*$، مجموعة صور ف$_2$ تسمى القانون.

أمثلة:

مثال 1: ـ نفرض أن ف$_2$ = {أ، ب، جـ} وأن ف$_1$ = {1, 0}.

صورة أ هي 00
صورة ب هي 10
صورة جـ هي 01

إذا كانت كلمة من ف$_1^*$ صورة لكلمة من ف$_2^*$ فهي صورة لكلمة وحيدة.

فمثلاً: 00011001 هي صورة الكلمة «جـ ب جـ أ».

مثال 2: ـ نفرض أن ف$_2$ = {أ، ب، جـ، د} وأن ف$_1$ = {1, 0}.

صورة أ هي 0
صورة ب هي 1.
صورة جـ هي 01.
صورة د هي 11.

إن الكلمة «1011» هي صورة الكلمة: «دأب» أو صورة «ب جـ ب» أو صورة «ب ب أ».

في هذه الحالة التطبيق ليس متبايناً والمجموعة {11, 01, 1, 0} ليست قانوناً.

مثال 3: ـ إذا كانت ف = {أ$_1$، أ$_2$، ... أ$_ن$} ألفباء كيفيا فإنه بالامكان وجود قانون بواسطة الألفباء {1, 0} وبالطريقة الآتية: ـ

صورة أ$_1$ هي 1001.
صورة أ$_2$ هي 10001.
صورة أ$_3$ هي 100001.
صورة أ$_ن$ هي 00001 ...10 مع (ن + 1) صفراً.

إذا كان «ن» نظاماً توافقياً يستعمل الألفباء ف فإنه بالامكان وجود نظام «نَ» يستعمل الألفباء {1, 0} بواسطة قانون بحيث يقال كل نظرية (ط) من (ن) نظرية (طَ) من (نَ).

IV فيئات النحو المولد

1 تعريف النحو المولد:

«GRAMMAIRE GENERATIVE»

تعريف: نسمي نحوا كل رباعية: { ق؛ ق$_1$؛ هـ، تا }.

حيث: ق هو القاموس النهائي وهو مكون من مجموعة منتهية من الرموز.

ق$_2$ هو القاموس المساعد وهو مكون من مجموعة من الرموز لا تنتمي الى ق.

هـ عنصر من ق يُسمى الرمز الأساسي أو البديهية.

تا مجموعة قواعد من الشكل: س ← ص حيث س، ص سلسلتان رموزها من ق ∪ ق$_1$.

ملاحظة: ـ عندما تكون في القاعدة س ← ص، رموز ص تنتمي كلها الى القاموس النهائي، نقول ان القاعدة نهائية.

2 النحو ذو الدرجة 0: ـ

نسمي هكذا كل نظام توافقي

هذا النحو هو أوسع الانحاء التي يمكننا أن نتخيلها فهو يولد لغات لا تستطيع أن تولدها الأنحاء الأخرى.

3 النحو ذو الدرجة 1 أو النحو غير الموجز:

إذا فرضنا أن في كل قاعدة س ← ص طول س أصغر من طول ص فإننا نقول إن النحو غير موجز أو أنه ذو الدرجة 1.

مثال: ـ القاموس النهائي هو ݍ = {أ، ب، جـ}.

القاموس المساعد هو ݍ = {هـ}.

البديهية هي الكلمة هـ.

هـ ← أهـ ب (1)

هـ ← ب هـ أ (2)

القواعد هي: أب ← جـ هـ (3)

ب أ ← هـ جـ (4)

هـ ← جـ (5)

لكي نعرف هل الكلمة ک تنتمي الى اللغة التي يولدها هذا النحو يكفي أن نبحث عن كل الكلمات الناتجة عن البديهية والتي يساوي طولها طول ک فإن كانت ک من بين هذه الكلمات فهي تنتمي إلى هذه اللغة.

مثلاً: ک هي الكلمة: «أأجـ».

لنبحث عن الكلمات التي طولها 3 فهي: «أهـ ب»، «ب هـ أ»، «أجـ ب»، «ب جـ أ»

إذن ک لا تنتمي الى اللغة التي يولدها هذا النحو.

بينما كلمة «أب جـ أب» تنتمي الى هذه اللغة، فمن هـ نستنتج:

«أهـ ب» بواسطة القاعدة (1) ثم أب هـ أب بواسطة القاعدة (2). ثم أب جـ أب بواسطة القاعدة 5.

إن ميزات الأنحواء ذات الدرجة (2) هي أنه يمكننا دائمًا معرفة ما اذا كانت كلمة ک تنتمي الى اللغة التي يولدها هذا النحو أم لا.

4 النحو المقيد بالنطاق:

نقول عن نحو انه مقيد بالنطاق اذا كانت قواعده من النوع:

س کـ ع ← س ل ع

حيث س، ع سلسلتان كيفيتان، کـ رمز من رموز القوس المساعد، ل سلسلة كيفية غير خالية.

نرى أن هذا النحو نحو غير موجز، وأن هذا النحو سمي نحواً مقيداً بالنطاق لأننا نعوض کـ بالسلسلة ل عندما توجد کـ بين س وَ ع أو في النطاق س ـ ع.

5 النحو المستقل عن النطاق:

قواعد النحو المستقل عن النطاق هي كلها من النوع:

کـ ← ل

حيث کـ رمز من رموز القاموس المساعد، ل سلسلة كيفية.

الفرق بين هذا النحو والنحو السابق هو أن السلسلتين س، ع هنا خاليتان وهذا مما يبرر تسمية هذا النحو بالنحو المستقل عن النطاق.

مثال 1: ـ القاموس النهائي هو: {أ، ب}.

القاموس المساعد هو: {هـ، و، ي}.

البديهية هي: {هـ}.

القواعد هي:

هـ ← أو (1)

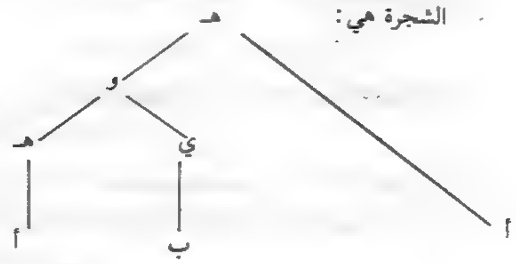
و ← ي هـ (2)

ي ← ب ي (3)

ي ← ب (4)

هـ ← أ (5)

الشجرة هي:



تظهر لنا كيف نحصل على السلسلة «أب أ».

مثال 2: القاموس النهائي هو: {أ، ب، جـ}.

القاموس المساعد هو: {هـ}.

البديهية هي: {هـ}

القواعد هي:

هـ ← أ هـ أ (1)

هـ ← ب هـ ب (2)

هـ ← جـ (3)

من الاشتقاقات الممكنة، الاشتقاق: هـ ← «أ هـ أ» ← «أ ب هـ ب أ» ← «أ ب ب هـ ب ب أ» ← «أ ب ب جـ ب ب أ».

نرى أن هذا النحو يولد اللغة التي عناصرها تكتب على الشكل س جـ سَ حيث س سلسلة من {أ، ب}*، سَ صورة س في مرآة.

مثال 3: القاموس النهائي هو {أ، ب}.

القاموس المساعد هو {هـ، و}.

البديهية هي: هـ

القواعد هي: هـ ← أو (1)

و ← وب (2)

من الاشتقاقات الممكنة الاشتقاق:

«هـ» ← «أ و» ← «أوب» ← «أوب ب» ← «أوب ب ب» ← «أوب ب ب ب»

ونرى أن هذا النحو لا يمكنه أن يولد أي سلسلة تنتمي الى {أ، ب}* نقول ان هذا النحو يولد اللغة الخالية.

6 النحو الخطي:

في النحو الخطي تكون القواعد غير نهائية كلها من الشكل:

ك ← س ل ص

حيث س، ص سلسلتان تنتمي رموزها الى القاموس النهائي

وكـ، ل عنصران من القاموس المساعد.

مثال: القاموس النهائي هو: {أ، ب}

القاموس المساعد هو: {هـ}

البديهية هي: هـ.

القواعد هي: هـ ← أهـ ب (1)

هـ ← أب (2)

هذا النحو خطي، وهذه احدى الاشتقاقات الممكنة:

«هـ» ⟵ «أهـ ب» ⟵ «أأهـ ب ب» ⟵

«أأأهـ ب ب ب» ⟵ «أأأأب ب ب ب»

نرى أن هذا النحو يولد اللغة أ^{ن}ب^{ن}.

7 النحو الخطي من جهة

النحو الخطي من جهة ـ من اليمين مثلاً ـ هو نحو قواعده غير النهائية من الشكل: كـ ← س ل (حيث كـ، ل، رمزان من القاموس المساعد، س سلسلة عناصرها تنتمي الى القاموس النهائي)... هذا النوع من الانحاء يسمى أيضاً نحو كليني (KLEENE عالم رياضي).

مثال: ـ القاموس النهائي هو {أ، ب}

القاموس المساعد هو {هـ، و}

البديهية هي: هـ

القواعد هي

هـ ⟵ أهـ (1)

و ⟵ ب و (2)

هـ ⟵ أو (3)

و ⟵ ب (4)

هذا النحو خطي من جهة وهذا اشتقاق ممكن: ـ

«هـ» ← «أهـ» ← «أأو» ← «أأب و» ←

«أأب ب و» ← «أأب ب ب»

هذا النحو يولد اللغة: أ^{ن}ب^{م}

هناك فيئات أخرى من الانحاء لن نتطرق لها هنا.

كـ ← س ل «حيث كـ، ل رمزان من القاموس المساعد، س سلسلة عناصرها تنتمي الى القاموس النهائي».

هذا النحو من الانحاء يسمى أيضاً نحو كلين (كلين عالم رياضي).

مثال: ـ القاموس النهائي هو {أ، ب}.

القاموس المساعد هو {هـ، و}.

البديهية هي: ـ هـ.

القواعد هي: ـ

هـ ⟵ أهـ (1)

و ⟵ ب و (2)

هـ ⟵ أو (3)

و ⟵ ب (4)

هذا النحو خطي من جهة.

هذا اشتقاق ممكن: ـ
«هـ» ← «أهـ» ← أأو ← «أأب و» ← «أأب ب و» ← «أأب ب ب» هذا النحو يولد اللغة: أ ب؟.

هناك فيئات أخرى من الانحاء لن نتطرق لها هنا.

مفهوم الوزن في العروض

إن مفهوم الوزن مفهوم أساسي في اللغة العربية وبالامكان اعطاء تعريف مجرد شامل لهذا المفهوم ولكننا سنقتصر هنا على الوزن فيما يخص علم العروض.

اذا كان لدينا نص ما فإننا سنمر بثلاث مراحل لإيجاد وزن هذا النص، سنرفق بهذا النص نصاً نسميه النص العروضي ثم نرفق النص العروضي بنص من الأشكال ثم نرفق نص الأشكال بنص هو اضافة صفوف تكافؤ سنعرفها فيما بعد.

1ـ الكتابة العروضية:

الكتابة العروضية مبنية على الأساس التالي: كل ما ينطق به يكتب وكل ما لا ينطق به لا يكتب.

تعريف: نسمي نصاً عروضياً لنص ن كل نصّ نَ مكتوبا كتابة عروضية انطلاقاً من النص ن.

سنقبل أن لكل نصّ من نصوص اللغة العربية المكتوب بحروفها المعتادة نص عروضي ونص عروضي واحد.

الانتقال من نص ن الى نصه العروضي يكون:

ـ باضافة حروف مثل: شد، جبل، هذا، له، إليه، التي تصير: شددَ، جبلن، هاذا، لهو، إليهي.

ـ أو بحذف حروف مثل:

فاخرج، تغيب الشمس، يطلع القمر، في المنزل، التي تصير:

فخرج، تغيب ششمس، يطلع لقمر، ف لمنزل.

مثال: النص العروضي للنص التالي:

وجيش كجنح الليل يزحف بالحصى

هو النص:

وجيشن كجنح لليل يزحف بلحصى

2ـ نص أشكال نص:

نرمز بالرموز الآتية:

{ ف، كـ، ض، س }

لكل من الفتحة والكسرة والضمة والسكون. المجموعة { ف، كـ، ض، س } تُسَمَّى مجموعة الأشكال، إذا كان ن نصا عروضياً فكل رتبة حرفية من هذا النص مرفوقة برمز واحد من الرموز السابقة (حروف المد مرفوقة بالرمز س).

إذا أخذنا الأشكال مرتبة ترتيب الحروف فإننا نحصل على نص من الأشكال يسمى نص أشكال النص ن.

وبصفة أدق إذا كان:

ن = س$_{1}$ س$_{2}$... س$_{م}$ نص عروضي

و ص$_{1}$ الشكل المرافق للحرف س$_{1}$

ص$_{2}$ الشكل المرافق للحرف س$_{2}$

ص$_{م}$ الشكل المرافق للحرف س$_{م}$

فإن نص أشكال ن هو النص:

ص$_{1}$ ص$_{2}$... ص$_{م}$

تعريف: نص أشكال نص هو نص أشكال نصه العروضي.

مثال: ن = زوجة الصياد لا تنام.

نَ = زوجة صصياد لا تنام.

نص أشكال ن هو النص:

ف س ف ض س ف س ف س كـ ف س ف ف س ض

3ـ مفهوم الوزن:

لدينا الألفباء = {ف، كـ، ض، س }

ونأخذ النظام الآتي: ف ~ كـ ~ ض.

إننا نعرف علاقة تكافؤ داخل اللغة التي يولدها الألفباء السابق.

فمثلاً: ف س ض ≈ ض س كـ

ونعرف أن هذه العلاقة متلائمة مع عملية الاضافة. سنرمز بالصفر للصف الذي يحتوي على س فقط وبالواحد للصف الذي يحتوي على ف، كـ، ض فيكون لدينا

0 = { س }

1 = { ف، كـ، ض }

00 = { س س }

10 = { س ف، س كـ، س ض }

01 = { ف س، كـ س، ض س }

11 = {ف ف، ف ض، ف كـ، كـ ف، كـ ك، ك ض، ض ف، ض كـ، ض ض } الخ.

ملاحظة: الأرقام تقرأ من اليمين الى اليسار هكذا: صفر واحد صفر صفر، صفر واحد، واحد صفر، واحد واحد الخ. . .

تعريف: كل نص تنتمي رموزه الى الألفباء { 1, 0 } حيث تشير 1, 0 الى الصفين السابقين يسمى وزناً.

4 ـ وزن نص:

اذا كان ن نصاً من نصوص اللغة العربية وكان س نص الأشكال المرفق به فان صف تكافؤ س يسمى وزن ن.

مثال:

النص: «وأنا جامد كالزحافات والعلل في قصائد البحتري» مأخوذ من قصيدة جديثة.

نص الأشكال المرفق بهذا النص هو:

«ف ف ف س ف س كـ ص س ف س ض ف س ف س كـ كـ س ف ف س كـ كـ س ض ص كـ س كـ»

وهو ينتمي الى الصف:

«1011101101101111011010110101101 0111»

الذي هو وزن النص السابق.

نعرف علاقة في مجموعة نصوص اللغة العربية هكذا:

$$ن_1 \ ع \ ن_2 \Leftrightarrow وزن \ ن_1 = وزن \ ن_2$$

فمثلا النصان «لاح الفجر» و«باب البيت» مرتبطان بهذه العلاقة لأن لهما وزن واحد وهو:

101 01 01

هذه العلاقة هي علاقة تَكَافُؤ ومجموعة الصفوف هي الأوزان.

5 ـ المقاطع العروضية:

اشتهرت بعض الأوزان البسيطة وسميت بالمقاطع العروضية وهذه العناصر يتراوح طولها بين الاثنين والخمسة وهي:

1 ان العروض العربي قابل لتحليل رياضي بحت في معظم جوانبه، والعلاقات التي أوضحها الخليل بن أحمد في وقته هي في جلّها علاقات رياضية حديثة.

من بين هذه العلاقات نجد علاقة التبديل الدوراني التي أدت بالخليل الى حصر البحور الستة عشرة[1] في خمس دوائر.

إن فكرة الدائرة العروضية فكرة خلابة، يمر بها جميع الباحثين محاولين بدون جدوى خلق الدائرة الواحدة التي تحتوي على كل البحور وستظهر في هذا البحث أنه لا يمكن حصر جميع البحور في دائرة واحدة.

---

(1) اكتشف الخليل خمسة عشر بحراً أما البحر السادس عشر الذي اكتشفه الأخفش فإن الخليل لم يجهله ولكن اعتبره مهملاً لأنه لم يجد له أمثلة شعرية . والمتدارك أو الخبب عنصر من الدائرة الخامسة .

2 فرضية

سنتقبل فرضية اللغويين هال وكيزر Hall et Keyser[2] اللذين طبقا مفاهيم علم اللغة التحويلي الى العروض. حسب هال وكيزر هناك مستويان: مستوى عميق ومستوى سطحي، الخليل بن أحمد فرق في وقته بين هذين المستويين وكل العروضيين الذين عابوا عليه بعض الأشياء مزجوا بين المستويين وأهملوا البنية العميقة.

عناصر البنية العميقة هي الأوتاد والأسباب.

عناصر البنية السطحية هي كلمات مكونة من الألفباء { 1, 0 } حيث نرقم الساكن بالواحد والمتحرك بالصفر في النص الشعري[3]. نسمي عناصر البنية السطحية أوزاناً، القواعد التي ترفق الأسباب والأوتاد بعناصر البنية السطحية هي تقليديا الزحافات والعلل.

3

سنرمز للسبب الخفيف بالرمز س وللسبب الثقيل بالرمز سَ وللوتد المقرون بالرمز و، والوتد المفروق بالرمز وَ[4].

نستطيع أن نكتب التفاعيل العشرة على الشكل الآتي:

فعولن = وس (10100)

فاعلن = س و (10010)

(2) HALL وKEYSER عالمان لغويان من امريكا اشتغلا مع NOAM CHOMSKY.

(3) نجد في العقد الفريد ترقيماً مشابهاً.

(4) وزن السبب الخفيف هو 01، وزن السبب الثقيل 00، وزن الوتد المقرون 100، وزن الوتد المفروق 010.

مفاعيلن = و س س (1010100)

فاعلاتن = س و س (1010010)

مستفعلن = س س و (1001010)

مفاعلتن = و سَ س (1000100)

متفاعلن = سَ س و (1001000)

فاع لاتن = وَ س س (1010010)

مستفع لن = س وَ س (1001010)

مفعولات: س س وَ (0101010)

(لقد وضعنا بين قوسين الوزن الأساسي[5] لكل تفعيلة).

الأشكال العروضية للبحور الستة عشرة تكتب اذا اقتصرنا على الشطر الواحد بالصفة الآتية:

(أ) الطويل   و س   و س س   و س   و س س

المديد   س و س   س و   س و س   س و

البسيط   س س و   س و   س س و   س و

(ب) الوافر   و سَ س   و سَ س   و سَ س

الكامل   سَ س و   سَ س و   سَ س و

(جـ) الهزج   و س س   و س س   و س س

الرجز   س س و   س س و   س س و

الرمل   س و س   س و س   س و س

(د) السريع   س س و   س س و   س س وَ

(5) التفعيلة عنصر من عناصر البنية العميقة نرفقها بعنصر من عناصر البنية السطحية الذي هو وزنها وقد يكون هذا الوزن أساسياً أي سالماً أو غير سالم من الزحاف.

المنسرح س س و س س وَ س س و
الخفيف س و س س وَ س س و س
المضارع و س س وَ س س و س س
المقتضب س س وَ س س و س س و
المجتث س وَ س س و س س و س
(هـ) المتقارب و س و س و س و س
المتدارك س و س و س و س و

4 العلاقات التي تربط بين مختلف الأشكال العروضية سواء كانت خاصة بالبيت أو بالتفعيلة هي أساساً علاقات دورانية، ولم يفطن فقط الخليل الى هذا النوع من العلاقات بل جعلها أساساً لنظريته.

التفاعيل مقسمة الى تفاعيل أصلية وفرعية فالتفعيلة الأصلية هي التي تبتدىء بوتد، والتفعيلة الفرعية تنتج عن الأصلية بتبديل دوراني فمثلاً مفاعيلن (و س س) تعطي بالتبديل الدوراني مستفعلن (س س و) وفاعلاتن (س و س).

البحور يندرج كل واحد منها في احدى الدوائر الخمس التي حددها الخليل فمثلاً البحور الثلاثة الطويل والمديد والبسيط، عناصر من الدائرة الأولى، دائرة المختلف حيث كل عنصر ينتج عن شبيهه بتبديل دوراني.

للتوصل الى الأشكال المستعملة حقاً يلجأ العروضي الى التحويلات التي تسمى بالعلل من حذف وتجزيء الخ...، التحويلات الدورانية استعملها الخليل في المستوى العميق وقبل غيرها من التحويلات.

5 الأشكال العروضية الخاصة بالبيت هي كلمات دورية دورتها تفعيلة أو اثنتان أو ثلاثة، الكلمة الدورية هي التي تتكون من جزء يتكرر، وأصغر جزء يولد هذه الكلمة يسمى الدورة*. مثال: «ب جـ جـ ب جـ جـ ب جـ جـ»، كلمة شكلية دورية دورتها «ب جـ جـ» ويمكن كتابة هذه الكلمة على الشكل (ب جـ جـ)^{3} كما يمكن كتابة الأشكال العروضية للبيت كما يلي:

الطويل: (و س و س س)^{4}
المديد: (س و س س و)^{4}
البسيط: (س س و س و)^{4}
الوافر: (و س س)^{6}
الكامل: (س س و)^{6}
الهزج: (و س س)^{6}
الرجز: (س س و)^{6}
الرمل: (س و س)^{6}

السريع: (س س و س س و س س وَ)^{2}
المنسرح: (س س و س س وَ س س و)^{2}
الخفيف: (س و س س وَ س س و س)^{2}
المضارع: (و س س وَ س س و س س)^{2}
المقتضب: (س س وَ س س و س س و)^{2}
المجتث: (س وَ س س و س س و س)^{2}
المتقارب: (و س)^{8}
المتدارك: (س و)^{8}

(* الدورة أو اللازمة motif).

نلاحظ أنه عندما تكون البحور مرتبطة بعلاقات دورية فإن اللازمات أيضاً مرتبطة بالعلاقة نفسها. فمثلاً بحور الهزج والرجز والرمل التي تنتمي الى دائرة المختلف لها لازمات: وس س، س س و، س وس تربطها علاقة دائرية. ومن الممكن أن نتساءل هل هذه النتيجة عامة أم لا؟

6 العلاقة الدائرية:

كي نتمكن من تعريف المفاهيم بصيغة دقيقة ومن ممارستها بصفة منطقية يلزمنا اعطاءها صيغة رياضية بحتة.

تعريف: نقول عن كلمتين ق، ك إنهما مرتبطتان بالعلاقة الدورانية ع إذا وجدت كلمتان ب، جـ بحيث ق = ب جـ، ك = جـ ب.

مثال: الكلمتان ق = س وس س و، ك = س س وس و مرتبطان بالعلاقة د (هنا ب = س و، جـ = س س و).

نظرية: العلاقة الدورانية علاقة تكافؤ[6].

هذه العلاقة تناظرية بصفة ظاهرة، هي انعكاسية لأننا نستطيع أن نكتب:
ق = هـ ق = ق هـ حيث هـ هي الكلمة الفارغة[7].

(6) علاقة التكافؤ هي العلاقة التي تتمتع بالخواص الآتية: الإنعكاس، التناظر، التعدي.

(7) الكلمة الخالية هي الكلمة التي لا تحتوي على أي عنصر. العملية التي نمارسها في مجموعة الكلمات هي عملية الإلصاق والكلمة الخالية هي العنصر الحيادي. (الكلمة هنا بمعنى الكلمة الشكلية وهي سلسلة من الرموز لا غير).

هذه العلاقة متعدية. لتكن ق، ك، ل ثلاث كلمات بحيث: ق ع ك، ك ع ل توجد اذن أربع كلمات أ، ب، جـ، ر بحيث: ق = أب ، ك = ب أ ، ك = جـ ر ، ل = ر جـ.

إذا كان للكلمتين ب، جـ الطول نفسه فإن المساواة: ك = ب أ = جـ ر . . . (1) تظهر ان ب = جـ، أ = ر ومنه ل = رجـ = أ ب = ق ومنه ل = ق

اذا كان للكلمتين ب، جـ طولان[8] مختلفان فلنفرض أن ب أقصر من جـ المساواة (1) تظهر وجود كلمة ط بحيث: جـ = ب ط، أ = ط ر ومنه: ق = أ ب = ط (رب)، ل = رجـ = ر(ب ط) ومنه ق ع ل البرهان شبيه بما سبق عندما يكون طول ب أكبر من طول جـ.

7 الدائرة العروضية لكلمة:

تعريف: الدائرة العروضية لكلمة ق هي المجموعة د (ق) المكونة من العناصر المكافئة للكلمة ق حسب العلاقة السابقة ع.

مثال:

د(وس س وس س وس س) = { وس س وس س وس س، س س و س س و س س و، وس و و س و وس و }

(8) طول الكلمة هو عدد الرتبات الحرفية فيها فمثلاً « بابا » طولها أربعة و م م م طولها ثلاثة. طول الكلمة الفارغة يساوي الصفر.

العلاقة ع المعرفة في مجموعة التفعيلات تجزىء هذه المجموعة هكذا:

{ فعولن، فاعلن }، { مفاعيلن، مستفعلن، فاعلاتن }، {مفاعلتن، متفاعلن} { فاع لاتن، مفعولات، مستفع لن }.

وتظهر الأصول كعناصر ممثلة لصفوف التكافؤ. إذا عرفنا على مجموعة أشكال البحور العلاقة ع فإننا نحصل على صفوف تكافؤ هي الدوائر العروضية الخمسة.

8 تمثيل كلمة بدورة:

نذكر أن البيان (graphe) هو زوج (ط، ي) حيث ط مجموعة تسمى عناصرها رؤوساً، ي مجموعة جزئية من ط × ط تسمى عناصرها أقواساً.

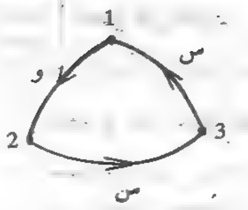
نسمي دورة (Cycle) كل سلسلة من الأقواس (ق١، ق٢، ... قم) بحيث:

1) يكون كل قوس مرتبطاً بسابقه
2) لا تستعمل السلسلة أكثر من مرة في كل قوس.
3) القوس الأول والقوس الأخير، مرتبطان.

وتكون الدورة بسيطة عندما لا نلتقي بالرؤوس أكثر من مرة[9] يمكن تمثيل كل كلمة بدورة بسيطة، فمثلاً الكلمة و س س تقابلها الدورة (و، س، س).

(9) هناك نظرية حديثة هي نظرية البيانات (théorie des graphes) تدرس هذا النوع من الأشياء.

مجموعة الدورات الموجودة في المخطط تتطابق مع الدائرة العروضية.



والتمثيل الكلاسيكي لدوائر العروض ما هو إلا ارفاق الأشكال العروضية بدورات بالمفهوم الموجود في نظرية البيانات (Théorie de graphs)

9 الدائرة العروضية لكلمة دورية:

هناك علاقة تربط بين دوائر العروض ودوائر اللازمات. هذه العلاقة تتلخص في النظرية الآتية:

نظرية: اذا كانت ق، ك كلمتين، ن عدداً طبيعياً فإن ق تكافىء ك اذا وفقط اذا كانت قⁿ تكافىء كⁿ.

لن نعطي برهاناً لهذه النظرية هنا ونترك الأمر للمختصين[10] ولكننا سنستنتج القضية الآتية:

قضية: اذا كانت ك كلمة دورية لازمتها ج فإن عدد عناصر الدائرة د (ك) الملحقة بالكلمة ك يساوي طول الكلمة ج.

(10) يوجد هذا البرهان في اطروحتنا « العروض العربي واللسانيات الرياضية » بجامعة باريس 7.
«Métrique arabe et linguistique mathématique» université de Paris 7.

10 تطبيق على العروض:

1.10 بحر الطويل ((وس وس س)^{4}) ينتمي الى الدائرة الأولى.

ستحتوي هذه الدائرة على خمسة عناصر بالضبط وهي:

المديد (س وس س و)^{4}، البسيط ((س س و س و)^{4})، الطويل نفسه وبحران مهملان سماهما المولدون المستطيل ((وس س وس)^{4}) والممتد ((س و س وس)^{4}).

2.10 في الدائرة الثانية نجد الوافر ((وس س)^{6}). هذه الدائرة تحتوي على ثلاثة عناصر بالضبط الوافر والكامل والبحر المهمل الذي شكله ((س وس)^{6}).

3.10 في الدائرة الثالثة نجد الهزج ((وس س)^{6}). تحتوي هذه الدائرة على ثلاثة بحور بالضبط الهزج نفسه والرجز ((س س و)^{6}) والرمل ((س وس)^{6}).

4.10 في الدائرة الرابعة نجد السريع ((س س و س س و س س $\bar{و}$)^{2}).

ستحتوي هذه الدائرة على تسعة بحور:

السريع، الخفيف، المنسرح، المضارع، المقتضب، المجتث، وثلاثة بحور مهملة سماها المولدون، المتئد، المنسرد، المطرد.

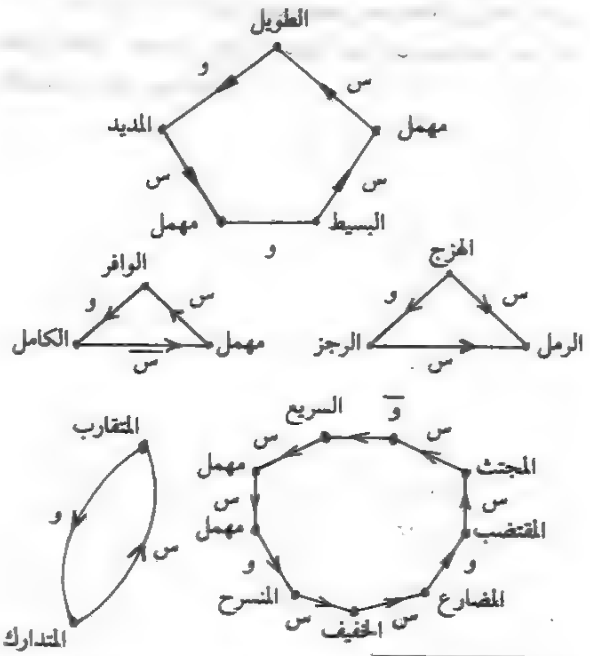
5.10 نجد في الدائرة الخامسة المتقارب ((و س)^{8}). هذه الدائرة تحتوي على عنصرين المتقارب والمتدارك ((س و)^{8}).

11 تمثيل مبسط لدوائر العروض:

قد اقتصر بصفة حدسية، العروضيون على وزن الشطر الواحد في

تمثيل البحور بواسطة الدوائر[11]. وهذا الاقتصار مقبول لأن: (ق ع ك تكافىء ق^{2} ع ك^{2}) كما أظهرنا. ولكن يمكن أن نقتصر على أبسط من هذا أي على وزن اللازمة.

يمكن تمثيلها هكذا:



(11) توجد نظرية جديدة في العروض هي نظرية الإيقاع (théorie du Rythme) أنشأها الرياضيان « روبو (JacquesRoubaud) و« لوسن » (Pierre Lusson). وتندرج نظرية الخليل داخل هذه النظرية بصفة عجيبة.

12 هذه التقديرات الخاصة بميدان يظهر وكأنه بعيد كل البعد عن عالم الرموز والاعداد تبين لنا بأن الرياضيات يمكنها أن تتناول اللغة لا لتجمّدها وتزيل عنها كل حيوية وانسانية كما يتوهم البعض ولكن لتثريها وتزيدنا فهماً لها.

وقد سبقنا في هذا الميدان علماء من بينهم الخليل بن أحمد الذي تناول مشاكل العروض بصفة علمية وخلق نموذجاً شكلياً هو كنز نكتشف فيه كل يوم الجديد.

نظرية الإيقاع والعروض الخليلي

1 إن نظرية الايقاع: (Théorie du Rythme) التي اخترعها الرياضيان «جاك روبو Jacques Roubaud» و«بيار لوسن Pierre Lusson» ما زالت في ريعان شبابها وما زالت تنضج يوماً بعد يوم ولم يتوصل أصحابها حتى الآن الى مجموعة نهائية من القواعد تعطيها هيكلاً نظرياً حقيقياً.

ولكن هل يريد هذا أصحابها؟ أظن أنهم ـ رغم كونهم رياضيين ـ غير ميالين الى التنظير الكثير وأنهم يريدون لها شيئاً من الانفتاح وشيئاً من التطور المستمر.

نشأت النظرية ـ نظرية الايقاع ـ انطلاقاً من نظرية «هال» و«كايزر» الخاصة «بالعروض المولد» ولكن أصحابها لم يكونوا مقتنعين بالممارسات التحويلية اللغوية العقيمة وبخضوع الايقاع والعروض الى اللسانيات فقرروا أن الايقاع يلزمه أن يخلق قوانينه بنفسه وألا يقتصر على العروض بل يلزمه أن يشمل ميادين أخرى مثل الموسيقى.

عمل «روبو» و«لوسن» لم يتناول العروض العربي بل كان منصباً قبل كل شيء على البحث عن القوانين العامة التي يمكن أن تخضع لها جميع أنواع الموسيقى وجميع أنواع العروض. وقد أنجزت أبحاث في الشعر الفرنسي والانكليزي والروسي أظهرت صلاحية أفكار أصحاب هذه النظرية وسأظهر أن أعمال «الخليل بن أحمد» كانت قريبة جداً من

أعمالهم وأن نخترع عروضنا كانت تقوده أفكار تشبه أفكارهم.

2 يقول «روبو» في كتابه «شيخوخة الاسكندر»*: «مفهوم نظرية الايقاع نفسه مفهوم شديد التناقض. لأن هذه النظرية لا تظهر الا على شكل مجموعة من القواعد الهدف منها توضيح مفهوم الايقاع الذي لا يعرف».

ولكن أصحاب هذه النظرية يتفقون كلهم على التعريف الآتي الذي يحدد مهام نظرية الايقاع.

3 تعريف: «نظرية الايقاع المجردة هي نظرية العلم التوافقي الذي يدرس سلاسل الحوادث المنفصلة والمرتبة تحت ضوء المثيل والمختلف فقط».

هذا التعريف يحتاج الى تفصيل وأمثلة سنختارها من العروض العربي...

أ ـ العلم التوافقي: COMBINATOIRE اشارة الى مفهوم هذه العبارة في الرياضيات أو في المنطق الرياضي.

ب ـ السلاسل: معناه أن الأعمال التوافقية تجري في «بعد واحد موجه» هو السطر.

جـ ـ الحوادث المنفصلة: معناه التغيرات المنفصلة EVENE-MENTS DISCRETS. هناك نوعان من المجموعات: المجموعات

(*) شيخوخة الإسكندر (Viellesse D'Alexandre) هي إشارة إلى شيخوخة القصيدة الكلاسيكية، الإسكندر يرمز إلى البحر الفرنسي «الكسندران Alexandrin».

القابلة للعد مثل: { 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 } أو مجموعة الاعداد الزوجية أو مجموعة الأعداد الناطقة ويقال عن هذه المجموعات انها منفصلة ومجموعات غير قابلة للعد مثل مجموعة الاعداد الحقيقية أو مجموعة نقط قطعة مستقيمة ويقال عن هذه المجموعات أنها متصلة.

د ـ المرتبة: تُرتب الحوادث حسب «مستويات» اذا جمعنا سلسلة من الحوادث فإننا نحصل على حادث من «المستوى الأعلى» وبالعكس فان تجزيء حادث يقود الى تجميع سلسلة من حوادث تنتمي الى المستوى الأدنى.

في العروض العربي لدينا مستوى الساكن (نرمز له بالرمز 1) والمتحرك (نرمز له بالرمز 0) ثم مستوى الأسباب والأوتاد ثم مستوى التفاعل.

التجميع: «متحرك + ساكن» أو 10 يقود السبب الخفيف سـ = (10).

التجميع: «متحرك + متحرك + ساكن» أو 100 يقود الى الوتد المجموع و = (100).

التجميع: «وتد مجموع + سبب خفيف» يقود الى التفعيلة: فعولن = وسـ.

تجميع أربع تفاعيل «فعولن فعولن فعولن فعولن» يقود الى الشطر المتقارب وبالعكس فإن الشطر يجزأ الى تفاعيل والتفاعيل تجزأ الى أسباب وأوتاد والأسباب والأوتاد تجزأ الى ساكن ومتحرك.

هذه النظرية للعروض كعلم «يتناول الحوادث المنعزلة مرتبة حسب مستويات مختلفة» هي كما نشاهد نظرية الخليل لهذا العلم. أعجب من

هذا فيما بعد: إن الخليل قد طبق جميع قوانين أصحاب الايقاع لانشاء نموذجه!

المخطط الآتي يظهر لنا المستويات المختلفة لشطر من الرجز «مستفعلن مستفعلن مستفعلن» (الشطر يجزأ الى تفاعيل)
(سـ سـ و) (سـ سـ و) (سـ سـ و) (التفاعيل تجزأ الى أسباب وأوتاد)
((10) (10) (100)) ((10) (10) (100)) ((10) (10) (100)) (الأسباب والأوتاد تجزأ الى سواكن ومتحركات).

هـ ـ المثيل والمختلف: كل المفاهيم التي تتناولها نظرية الايقاع يلزم أن ينظر إليها من ناحيتي التشابه والاختلاف.

التشابه يقود نحو ما هو ايقاعي مثلاً الزحافات الاختيارية التي تطرأ على التفعيلة «مستفعلن» في الرجز.

4 زيادة على هذه المفاهيم التي وردت في تعريف نظرية الايقاع فإننا نجد مفاهيم أخرى نذكر منها:

أ ـ التعليم: (Imarquage) يتم تنظيم سلسلات الحوادث بواسطة تعليمها. التعليم هو طريقة لمعرفة حادث (المثيل) ومقارنته بحادث آخر (المختلف). مثلاً فيما يخص سلسلة الحروف فالعروض يتناولها من زاوية واحدة، وهي زاوية الساكن والمتحرك فكل ما هو ساكن شبيه بما هو ساكن وهو معاكس لكل ما هو غير ساكن أي متحرك.

فتنظيم الحروف حسب السواكن والمتحركات يكون تعليمًا والترميز الذي استعمله العروضيون القدامى (انظر اشكال الدوائر العروضية في العقد الفريد لابن عبد ربه) حيث يرمز بالرمز 0 للمتحرك و 1 للساكن

هو الترميز نفسه الذي يستعمله الآن أصحاب نظرية الايقاع.

ب ـ التجميع الايقاعي: يتم تنظيم سلسلات الاحداث حسب المستويات بواسطة تجميعها، والتجميع يكون حسب طرق مختلفة الالصاق، التبديل.

جـ ـ الحوادث الأولية: ان بعض الحوادث تجزأ الى حوادث موجودة في مستوى أدنى. مثلا التفاعيل تجزأ الى أسباب وأوتاد ولكن هناك حوادث لا يمكن تجزيئها. هذه الحوادث تسمى الحوادث الأولية.

في النموذج الخليلي الحوادث الأولية هي الساكن والمتحرك. في الطرق الغربية لدراسة العروض العربي، الحوادث الأولية هي المقاطع الصوتية التي يرمز لها بالرمز U و ـ (U للمقطع القصير، و ـ للمقاطع الطويلة).

د ـ البحر: نقول عن سلسلة انها بحر اذا أمكن تحليلها على مستوى من المستويات الى ترديد عناصر متشابهة.

هـ ـ المبدأ 2 - 3 : المبدأ الذي يحكم نظرية الايقاع هو مبدأ الايقاع الأدنى حادث واحد لا يمكنه أن يكون تجميعاً. يلزم إذن حادثان. تجميع حادثين يكوّن حادثا في المستوى الأعلى وهذا الحادث هو المثيل الذي يلزمه أن يعارض مختلفاً لا يستطيع أن يكون حسب مبدأ الايقاع الأدنى الا تجميعاً مكوناً من ثلاثة حوادث. التجميعات اذن تكون مكونة من حادثين أو ثلاثة. المبدأ السابق يسمى المبدأ 2 - 3.

لنرجع الآن الى النموذج الخليلي: انه يحقق تماماً هذا المبدأ:

ـ الحوادث الأولية تتكون من الساكن (1) والمتحرك (0).

ـ الأسباب والأوتاد مكونة من حرفين أو ثلاثة.

ـ إذا رمزنا للسبب الخفيف بالرمز س والسبب الثقيل بالرمز س̄ وللوتد المجموع بالرمز و وللوتد المفروق بالرمز و̄ يكون لدينا:

س = 10.

س̄ = 00.

و = 100.

و̄ = 010.

ـ التفاعيل العشر مكونة من وتد وسبب اذا كانت خماسية أو وتد وسببين اذا كانت سباعية أي من ثلاثة عناصر من المجموعة.

{س، س̄، و، و̄}

فعولن = وس.

فاعلن = سو.

متفاعلتن = وس̄س.

متفاعلن = س̄سو.

مفاعيلن = وسس.

مستفعلن = سسو.

فاعلاتن = سوس.

فاع لاتن = و̄سس.

مفعولات = سسو̄.

مستفع لن = سو̄س.

والتقويس: التقويس معناه هنا طريقة استعمال الأقواس.

للانتقال من مستوى الى آخر ولاظهار حدود الوحدات ستضع

أقواساً. فمثلاً شطر الرجز المجزوء سيكتب هكذا:

((10) (10) (100)) ((10) (10) (100))

القوسان الخارجان الأول والأخير هما حدا الشطر يليهما أقواس حدود التفعيلتين ثم أقواس حدود الأوتاد والأسباب. والتفعيلة مستفعلن المولدة لوزن الرجز تكتب على شكل «سلسلة مقوسة» من الحوادث هكذا: ((10) (10) (100))

ز ـ كل سلسلة من الحوادث غير مقوسة تسمى سلسلة «شبه ايقاعية»

مثال: ـ 10 10 100 10 10 10 100 10 100 10

في العروض العربي التقويس ضمني فهو ظاهر خطياً أو صوتياً: الأبيات مكتوبة سطراً سطراً ويشار الى نهايتها بواسطة القافية والشطر الأول منفصل عن الشطر الثاني بواسطة بياض والتفعيلة منفصلة عن التفعيلة بواسطة البياض الذي يفصل بين الكلمتين، أما على مستوى الأسباب والأوتاد فالتقويس مشار إليه في النظرية وأحياناً في شكل التفعيلة.

انظر الى الخليل لما أراد أن يفرق بين الوحدتين: ـ

((10) (10) (100)) و̄ ((10) (010) (10)) ماذا فعل؟

كتب الأولى التي هي مكونة من سببين خفيفين يتبعهما وتد مقرون على الشكل «مستفعلن» والثانية التي هي مكونة من سببين خفيفين يتوسطهما وتد مفروق على الشكل مستفع لن.

كما أن الخليل فرق بين «فاعلاتن» التي هي سببان خفيفان يتوسطهما وتد مجموع وبين «فاع لاتن» التي هي وتد مفروق متبوع

بسببين خفيفين، فهاتان التفعيلتان ناتجتان عن سلسلة شبه ايقاعية واحدة هي: -

10 100 10

ولكن التقويس في حالة فاعلاتن هو: ((10) (100) (10))
والتقويس في حالة فاع لاتن هو: ((010) (10) (10))

ها هي الآن التفعيلات العشر مع التقويس الملائم لأوزانها.

فعولن = ((100) (10)).

فاعلن = ((10) (100)).

مفاعلتن = ((100) (00) (10)).

متفاعلن = ((00) (10) (100)).

مفاعيلن = ((100) (10) (10))

مستفعلن = ((10) (10) (100)).

فاعلاتن = ((10) (100) (10)).

فاع لاتن = ((010) (10) (10)).

مفعولات = ((10) (10) (010)).

مستفع لن = ((10) (010) (10)).

قد عاب كثير من العروضيين العرب والأجانب* على الخليل أنه عقّد نظريته، وأنه مثلاً فرق بصفة اصطناعية بين

مستفعلن و مستفع لن

وبين: فاعلاتن و فاع لاتن.

حتى ان ابن عبد ربه مثلاً لا يهتم بهذا التفريق ويزعم في العقد

(*) أنظر النقد اللاذع الذي وجهه إلى أعمال الخليل كل من Weil ، إبراهيم أنيس، كمال أبو ديب ، S.Guyard الخ.

الفريد أن التفاعيل عددها ثمانية وهي: فعولن، فاعلن، مفاعلتن مفاعيلن، مستفعلن، فاعلاتن، مفعولات. والنويهي يحاول الاستغناء عن مفعولات التي لا تظهر بصفة جلية إلا في المنسرح فيقترح الوزن الآتي لهذا البحر:

مستفعلاتن مستفعلن فاعلن*

ولكن هذا الوزن يحمل التفعيلة مستفعلاتن التي هي مكونة من ثلاثة أسباب ووتد أي أربع وحدات ونعرف أن هذا خارج عن نطاق المبدأ 2-3 الذي ربما عمل به الخليل في الخفاء.

أما كمال أبو ديب فهو يثور ضد السبب الثقيل والوتد المفروق ويحاول أن يستغني عنهما فيقترح خمس تفعيلات لانشاء الأوزان وهذه التفعيلات هي: -

فعولن، فاعلن، مفاعيلن، مستفعلن، فاعلاتن.

وطريقة كمال أبو ديب لا تشكو إلا من عيب واحد ولكنه أقبح العيوب التي يستطيع أن يتهم بها عمل عروضي وهذا العيب هو أن الأبيات ليست متكافئة في الوزن أي أن ما هو «المثيل» على مستوى من المستويات محذوف تماماً من نظريته.

للتفريق بين مستفعلن ومستفع لن من جهة وفاعلاتن وفاع لاتن من جهة ثانية دافعان. الدافع الأول هو التغيرات التي تطرأ على كل من التفعيلات والتي تختلف من تجزيء الى تجزيء وذلك حسب المبدأ الخليلي الذي يقول ان الأوتاد لا تتغير أوزانها بينما الأسباب تتغير.

(*) الذي اقترح هذا الوزن لأول مرة هو حازم القرطجني ، أنظر كتابه «منهاج البلغاء وسراج الأدباء» الصفحة 242 وقد قلده Stanislas-Guyard في كتابه :

Nouvelle Théorie de la métrique arabe.

ولكن نظرة سريعة على الواقع الشعري تظهر لنا ان التغييرات التي تطرأ على التفعيلات لا تتناقض مع أفكار الخليل لكنها لا تؤيدها فمثلاً في الخفيف حذف الحرف السابع (أي الكف). لا يدخل على التفعيلة «مستفع لن» الا في أذهان العروضيين. ولو وقع ذلك فعلا وكنا نملك شواهد كافية وموثوقاً بها لتحتم علينا أن نتقبل نظرية الخليل لأن هذا الحرف السابع سيكون وجوباً ثاني سبب لو حذف الحرف الرابع من التفعيلة أي لو دخل عليها الطي لتحتم علينا أن نرفض وجهة نظر الخليل سيكون ثاني سبب وليس ثاني وتد.

ولكن (والذين يمارسون الشعر يعرفون ويشعرون بهذا) لا الرابع ولا السابع من هذه التفعيلة يتغير في الخفيف ويبقى تقسيم الخليل لهذه التفعيلة مقبولاً ولكن ليس حتمياً.

يمكننا أن نعمل الملاحظة نفسها فيما يخص فاعلاتن وفاع لاتن الزحافات التي تدخل فعلا على الزوجين من التفعيلات لا تسمح لنا بأن نحكم على صلاحية تجزئة التفعيلتين الى «فاع لاتن» ومستفع لن أو على عدم صلاحيتها.

لماذا اذن اختار الخليل تجزئة جديدة ليس هو في حاجة إليها؟ يظهر هنا الدافع الثاني.

للخليل دافع نظري بحت قاده الى هذا الاختيار وسنحاول أن نكشف عنه فيما بعد.

5 هذه هي المفاهيم الأساسية لنظرية الايقاع واننا نرى من الآن أن النموذج الخليلي يندرج ضمنها بصفة جلية وكل المحاولات لتبسيط العروض والتي تتسم كلها بالصبغة الوصفية البحتة وتتجاهل

مستوى الاسباب والاوتاد، كل هذه المحاولات متناقضة مع نظرية الايقاع مهملة أهم أسسه، وميزتها الوحيدة هي ربما ميزة تربوية متواضعة الهدف منها سرد مجموعة من الأوزان.

ولكن العروض مثل النحو ومثل اللسانيات ليس الهدف منه سرد ما هو مقبول وما هو غير مقبول، إنه قبل كل شيء تفكير يتناول جانباً من اللغة ويتعداها إنه ممارسة لقواعد يحملها الوزن في طياته ويطبقها ربما الشاعر أو الموسيقي بصفة لا شعورية.

نموذج تحليلي لعروض الخليل بن أحمد وآفاق استعماله بواسطة الحاسب الآلي

السطور الآتية ملخص وجيز لجزء من الدراسات التي قمنا بها منذ عشر سنين في ميدان العروض وهي تهدف الى حل مشكل التقطيع بصفة نهائية وبسيطة وتضع أساساً لاستعمال قواعد خوارزمية يمكن التعبير عنها بصفة سهلة في أي لغة من لغات الآلات الحاسبة.

1 ـ **النماذج اللغوية**: تنقسم النماذج اللغوية أساساً الى نوعين من النماذج:

(أ) **النموذج المولد** وهو الذي تنتج قواعده عناصر لغة معينة أي السلاسل التي تركب بواسطة قاموس أو ألفباء معين.

(ب) **النموذج التحليلي** وهو النموذج الذي يمكن بواسطته التحقق من أن سلسلة معينة تنتمي أو لا تنتمي الى لغة معينة.

2 ـ **نماذج العروض**: نماذج العروض تنقسم مثل هذه النماذج اللغوية الى صنفين:

(أ) **النموذج المولد** وهو الذي ينتج بواسطة نظام من قواعد اللغة الايقاعية التي ينطبق عليها الشعر. وفي هذا الصدد يلزمنا أن نشير الى أن العروض لا ينظر الى المكونات الصوتية إلا من وجهين: الساكن والمتحرك.

فإذا رمزنا الى الساكن بالرمز 1 والمتحرك بالرمز ٥ (هذا التقنين استعمله القدامى مثل ابن عبد ربه في العقد الفريد وابن السراج في المعيار في أوزان الاشعار). فإننا نرى أن اللغة التي يمارسها العروض هي جزء من اللغة التي ينتجها الألفباء {1, 0} وسنرمز لها بالكتابة الآتية:

$$\{1, 0\}^* = \{0, 1, 00, 10, 01, 11, ...\}$$ الخ

يمكن تضييق هذه اللغة اذا راعينا قاعدة عدم التقاء الساكنين وقاعدة عدم البدء بالساكن فنحصل على اللغة:

$$0\{1, 0\}^* \cap [\{1, 0\}^* - \{1, 0\}^* 11 \{1, 0\}^*]$$

هذا النوع من اللغات يسمى لغة كليني **Langage de Kleene** ويمكن تضييق هذه اللغة بحذف السلاسل التي تحتوي على: «٥٥٥٥٥» لأنه لا يلتقي في الشعر أكثر من اربعة متحركات الخ...

اذن النموذج المولد في العروض هو النموذج الذي ينتج هذه السلاسل من السواكن والمتحركات التي تنطبق على الواقع الشعري.

(ب) **النموذج التحليلي** في العروض ينطلق من مثال معين (بيت من الشعر) تستخلص منه سلسلة من السواكن والمتحركات ويحاول أن تحدد مكوناته وانتماؤه الى أصناف وزنية معروفة.

غالب النماذج العروضية نماذج مولدة وعروض الخليل من هذا النوع.

مهام النماذج العروضية التحليلية تنطبق مع مهام التقطيع ولكن التقطيع لا يهتم الا بتحديد سلسلة السواكن والمتحركات بواسطة

القواعد المعروفة (يعد التنوين حرفين بمتحرك يتلوه ساكن الخ . .) التي تقرن بالبيت المكتوب.

وذلك حسب المبدأ الذي عرفه ابن عبد ربه: «ولا يعد في العروض الا ما يظهر على اللسان». أما تحديد الاسباب والاوتاد والتفاعيل والشطر، فإن كل هذا يترك لحدس القارىء.

وانطلاقاً من هذا فإنه يمكننا القول بأن العرب لم يهتموا بالنموذج التحليلي لعروضهم والمحاولات الجديدة ابتداء من أبحاث المستشرقين حتى اعمال العروضيين الجدد، اهتمت فقط بالجانب التقني للتقطيع ولم تحاول أن تبني نموذجاً بمعنى الكلمة.

3ـ النموذج الخليلي:

ان النموذج الذي نريد بناءه هو نموذج عكسي لنموذج الخليل ولذا فإننا نعرض بسرعة النقاط الاساسية التي بني عليها عروض الفراهيدي:

(أ) تجمع السواكن والمتحركات الى وحدات تسمى أسبابا وأوتادا.

ـ السبب الخفيف مكون من متحرك متبوع بساكن ونرمز له بالرمز س ونكتب س= 10

ـ السبب الثقيل: هو: سَ = 00 (متحركان).

ـ الوتد المجموع هو: و= 100 (متحركان يليهما ساكن).

ـ الوتد المفروق هو وَ= 010 (متحركان يليهما ساكن).

(ب) تجمع الأسباب والأوتاد الى تفاعيل عشر هي:

فعولن = 10100 = وس
فاعلن = 10010 = س و

مفاعلتن = 1000100 = و سَ س
متفاعلن = 1001000 = سَ س و

مفاعيلن = 1010100 = و س س
مستفعلن = 1001010 = س س و
فاعلاتن = 1010010 = س و س

فاع لاتن = 1010010 = وَ س س
مفعولات = 0101010 = س س وَ
مستفع لن = 1001010 = س وَ س

(ج) تجمع التفاعيل الى أشطر ثم أبيات فتحصل على الأوزان المعروفة الآتية:

الطويل: فعولن مفاعيلن فعولن مفاعيلن = (وس) (وس س) (و س) (و س س)

المديد: فاعلاتن فاعلن فاعلاتن فاعلن = (س و س) (س و) (س و س) (س و)

البسيط: مستفعلن فاعلن مستفعلن فاعلن = (س س و) (س و) (س س و) (س و)

الوافر: مفاعلتن مفاعلتن مفاعلتن = (و سَ س) (و سَ س) (و سَ س)

الكامل: متفاعلن متفاعلن متفاعلن = (سَ س و) (سَ س و) (سَ س و)

الهــزج: مفـاعيلن مفـاعيلن مفـاعيلن = (و س س) (و س س) (و س س)

الرجز: مستفعلن مستفعلن مستفعلن = (س س و) (س س و) (س س و)

الرمل: فاعلاتن فاعلاتن فـاعلاتن = (س و س) (س و س) (س و س)

السريع: مستفعلن مستفعلن مفعولات = (س س و) (س س و) (س س ق)

المنسـرح: مستفعلن مفعولات مستفعلن = (س س و) (س س ق) (س س و)

الخفيف: فاعلاتن مستفـع لن فاعـلاتن = (س و س) (س ق س) (س و س)

المضـارع: مفاعيلن فـاع لاتن مفـاعيلن = (و س س) (ق س س) (و س س)

المقتضب: مفعولات مستفعلن مستفعلن = (س س ق) (س س و) (س س و)

المجتث: مستفـع لن فاعـلاتن فاعلاتن = (س ق س) (س و س) (س و س)

المتقارب: فعولن فعولن فعولن فعولن

المتدارك: فاعلن فاعلن فاعلن فاعلن

(د) هذه البحور تجمع في دوائر (انظر البحث السابق).

4 نموذج تحليلي للشعر العربي:

لتحليل بيت يعرض علينا سنحاول أن نحدد مكوناته حسب المستويات المختلفة: «متحركات وسواكن ثم أسباب وأوتاد ثم تفاعيل ثم شطر ثم بيت»

(أ) الانتقال من البيت المنطوق أو المكتوب نحو مستوى الساكن والمتحرك عملية قننها القدامى ولن نتناولها هنا بالدراسة. نفرض إذاً ما يلي:

«كل بيت يقرن بسلسلة واحدة من السواكن والمتحركات».

(ب) نفرض أن الساكن علامة نهاية وحدة (هذه الفرضية مؤقتة)

وينتج عن هذا الأمر الأول في خوارزميتنا:

«بعد كل ساكن ضع علامة فصل».

(ج) تطبيق القاعدة (ب) تمكننا من عزل الوحدات الآتية:

/10/، /100/، 1000/، 10000/

ولن نحصل على وحدات أخرى لأنه لا يجتمع في الشعر أكثر من أربعة متحركات.

(د) مبدأ الزحاف هو الآتي:

«الزحاف هو تغيير يلحق ثواني الأسباب بحذف أو إسكان».

ونعبر عن هذا بما يلي:

0←00 10←00 0←10
س̄ س̄ س

أو بما يلي: س ← 10، س ← 0، س̄ ـ 00، س̄ ← 10، س̄ ← 0

وفي هذه الحالة نقول ان السبب يحققه متحرك وساكن أو متحرك ان كان خفيفاً ومتحركان، أو متحرك وساكن أو متحرك واحد إن كان ثقيلاً.

وهذا التعبير الاخير عن الاسباب (وبطريقة مماثلة عن الأوتاد) استعمله اللغويان الشهيران «هال» و«كيزر» ثم «ماليتق» تلميذة هال. وذلك عند دراستهم للعروض الخليلي وهو يبسط كثيراً باب الزحافات والعلل ويمكننا من الاستغناء عن القاموس الطويل المتعلق بالتغييرات التي تطرأ على البيت.

(هـ) الوحدات التي عرضت في (جـ) تحلل كالآتي:

/10/ /100/ / 10/0 / / 100/0/ /10/00/ /100/0/0/

س و س س س و س س س س و

(نترك هنا على الهامش الوتد المفروق وعلل القطع والتشعيث والخرم، هناك حلول بسيطة لها).

(و) اذا تمعنا في جدول البحور فإننا نلاحظ أنه لا يتجاور وتدان كما أنه لا يتجاور أكثر من سببين ولذا فإننا نضع القاعدة الآتية:

قاعدة تجاور الأسباب والأوتاد: لا يتجاور الوتدان ولا يتجاور ثلاثة أسباب.

(ز) قاعدة الجوار تمكننا من تحليل أي بيت الى أسباب وأوتاد فمثلاً بيت امرىء القيس:

وليل كموج البحر أرخى سدوله

/100/ 10/ 100/ 10/ 10/-100/ 10/-100/ 100/

س س س س

علي بأنواع الهموم ليبتلي

/100/ 1000/ 10/ 10/ 100/ 1000/ 100/

س س

يقنن في الأول بوضع علامات بعد السواكن ثم بتحديد الأسباب الظاهرة ثم بتحديد ما يجاور هذه الأسباب وذلك بتطبيق قاعدة الجوار فنحصل على:

/100/ 10/ 100/ 10/ 10/ 100/ 10/ 100/ 0/ 10/

و س و س س و س و س س

/100/ 0/ 100/ 10/ 10/ 100/ 0/ 100/ 0/ 10/

و س و س س و س و س س

(ح) للانتقال الى مستوى التفاعيل نلاحظ ما يلي (وذلك من خلال جدول الأوزان):

«كل تفعيلة تحمل الوتد في رتبة معينة فهو اما في الأول أو في الأخير أو في الرتبة الثانية».

ومنه الخوارزمية الآتية:

---

(١) اذا ابتدىء البيت بوتد فإنه يفتح قوس تفعيلة قبل كل وتد.

(٢) اذا جاء الوتد في الرتبة الثانية فانه يفتح قوس تفعيلة أمام كل سبب يتلوه وتد.

(٣) اذا ابتدىء البيت بسببين فإنه يغلق قوس تفعيلة بعد كل وتد.

على القارىء أن يتحقق من أن:

ـ هذه الخوارزمية لازمة (فالمديد (س و س س و س و س) بامكاننا أن نكتبه على الشكل (س و) (س س و) (س و س) أي فاعلن مستفعلن فاعلاتن أو على الشكل (س و س) (س و س) (س و) أي فاعلاتن فاعلاتن فعولن الخ...)

ـ هذه الخوارزمية تكفي لحل مشكل الانتقال من مستوى الاسباب والاوتاد الى مستوى التفاعيل بصفة نهائية.

5 ـ نموذج استدراك الزحاف:

يمكننا انطلاقاً من النموذج السابق بناء نموذج آخر نرجع فيه البيت الى أصله. وللوصول الى هذا النموذج نبرهن على بعض النظريات:

نظرية 1: كل وحدة تختلف عن 100 يبدأ تحليلها بسبب (هذا واضح من خلال (4، هـ).

نظرية 2: كل وحدة من الشكل 000 100 100 100 100 غير مسبوقة ومتبوعة بـ 100 تحلل كالآتي 100/000 / 0/ 10/ 100/ 0/
س س و س

10/ 100/ هذا ناتج عن النظرية 1 وعن قاعدة الجوار.
س و

نظرية 3: كل وحدة من الشكل 1000 تحلل كالآتي /0/100/ الا اذا كانت متبوعة بالوحدة (100) أو بـ (100) (100) (100) أو بصفة عامة بـ $(100)^{ن2+1}$.

في هذه الحالة التحليل يكون كالآتي /10/00/
س س

(النظرية 3 ناتجة عن النظرية 2 وعن قاعدة الجوار).

النظريتان 2 و 3 تمكننا من وضع القاعدة الآتية:

لارجاع الاسباب الى أصولها تطبق ما يلي:

ـ 100 ← 1010 في الوحدات الموجودة في الرتبات الزوجية انطلاقاً من نهاية السلسلة: 000 100 100 100 100
1 2 3 4

ـ 1000 ← 1010 الا اذا كانت 1000 متبوعة بأحادية 100 أو بثلاثية 100 100 100 أو بتونية $(100)^{ن}$ حيث ن عدد فردي.

هاتان القاعدتان البسيطتان تكفيان لارجاع وزن البيت الى أصله.

هذه اللمحة الوجيزة عن النموذج الذي كوناه (لم نتعرض هنا لكل القواعد التي عددها محدود والتي هي بسيطة) تظهر لنا طريقاً سهلاً لحل مشكل تحليل البيت بواسطة الحساب الآلي، والميزة فيها أن عددها قليل وأنه يمكن استعمال أبسط الآلات لانجاز البرامج التي يمكن أن نقرنها بها.

أمثلـة

(1) ودع هريرة آن الركب مرتحل

التقنين: 1010 100 1000 1010 100 1000

الحدود بعد السواكن: /10/10/100/1000/10/10/100/1000/

تحديد الاسباب التامة: /10/10/100/1000/10/10/100/1000/
س س س س

الوحدات /100/ المنعزلة هي أوتاد والوحدات /1000/ تحلل الى /0/100/0.

وأخير /10/10/100/0/100 /10/ 10/100/0/100/

س س و س و س س و س و

البيت يبتدىء بـ: س س نضع إذاً، حد تفعيلة بعد كل وتد.

فنحصل على (س س و) (س و) (س س و) (س و)

أي مستفعلن فعلن، مستفعلن فعلن والبحر هو (البسيط)

(2) اذا استعملنا طريقة استدراك الزحاف فان اضافة الساكن تطبق على 1000 ولا تطبق على الوحدات 100 ويصبح الوزن كالآتي:

100 10 100 10 10 100 10 100 10 10

(س س و) (س و) (س س و) (س و)

مستفعلن فاعلن مستفعلن فاعلن

(3) وعيشتي الشباب وليس منها

/10/100/1000/100/1000/100/

صباي ولاذوا ثبي المجان (المعري).

/10/100/1000/100/1000/ 100/

الوحدات 100 أوتاد لأنها منعزلة و(1000) هي س سَ لأنها متبوعة بأوتاد ويكون التقنين كالآتي:

10/100 /10/00/100 /10/00/100/

(و سَ س) (و سَ س) (و س)

مفاعلتن مفاعلتن فعولن

/10/100/10/00/100/10/00/100

(و سَ س) (و سَ س) (و س)

مفاعلتن مفاعلتن فعولن

البحر هو الوافر.

(4) تمرست بالآفات حتى تركتها

100/100/10 /100/10/10/100/10/100/

2 3

تقول أمات الموت أم ذعر الدهر (المتنبي)

10/10/1000/100/10/10/1000/100/

1

نستعمل هنا طريقة استدراك الزحاف

القاعدة 100 ← 1010 تطبق على 2

القاعدة 10000 ← 10010 تطبق على كل الفواصل الصغرى.

ويصبح الوزن كالآتي:

/10/10/100/10/100/10/10/100/10/100/

(و س) (و س س) (و س) (و س س)

فعولن مفاعيلن فعولن مفاعيلن

/10 /10/100/10/100/10/10/100/10/100/

(و س) (و س س) (و س) (و س س)

فعولن مفاعيلن فعولن مفاعيلن

والبحر هو الطويل.

(5) تـوقـتـك نـسـرا وتجـاءت جهـارا

1010010100101001010

وهـل تـطلع الشمس إلا نهارا (المعري)

1010010100101001010

لا يضاف هنا أي حرف فالبيت خال من الزحاف وهو يحلل كالآتي:

/10/100/10/100/10/100/10/100/

(و س) (و س) (و س) (و س)

فعولن فعولن فعولن فعولن

/10/100/10/100/10/100/10/100/

(و س) (و س) (و س) (و س)

فعولن فعولن فعولن فعولن

(المتقارب)

6 ـ جادك الغيث إذا الغيث همى

10001010001010010

نطبق القاعدة: 1000 ـــــ 10010

فنحصل على:

/10/100/10/10/100/10/10/100/

(س و س) (س و س) (س و)

والبحر هو المتقارب.

7 ـ أقـول وقـد ناحت بقربي حمـامة

/100/100/10/100/10/10/1000/100/

أيا جارتا هل تسمعين بحالي (أبو فراس)

/10/1000/100/ 10/10/100/10/100/

يضاف ساكن بعد الحرف الأول في الفواصل (1000) وفي الجزء 2 من السلسلة: 100/100/100/ فيؤول الوزن الى:
1 2 3

/10/10/100/10/100/10/10/100/10/100/

(و س) (و س س) (و س) (و س س)

فعولن مفاعيلن فعولن مفاعيلن

/10/100/10/100/10/10/100/10/100/

(و س) (و س س) (و س) (و س)

فعولن مفاعيلن فعولن فعولن

(الطويل الثالث)

مراجع :

M. Harkat: Metrique Arabe et Linguistique Mathematique

(Doctorat de 3em cycle Paris 7 - 1979)

M. Harkat: Le modele Khalilien au centre des Theries (Doctorat d'Etat Paris 7 - 1984)

M. Harkat: Metrique Arabe Structure et Transformations (Mezura - Paris)

M. Harkat: Le recit Khalilien (Cahiers de Poetique Comparee - Paris)

M. Harkat: Le poete libre arabe aujourd'hui (Action poetique - Paris)

في المجموعات

حاولنا في هذه الأسطر أن نعالج بأبسط طريقة ممكنة مسائل رئيسة متعلقة بـ «المجموعات» تثير تساؤلات دائمة للرياضي الذي هو غير متخصص في المنطق ونظرية المجموعات.

هذه المسائل تتجنبها غالب المؤلفات ما عدا الكتب المتخصصة، والتي تصعب قراءتها حتى على الرّياضي المحترف أحياناً.

نتمنى أن نكون قد سددنا ثغرة بدراستنا هذه، فهي الخطوة الثانية لمن له تكوين أساسي وأولي في ما سمّي حتى الآن بـ «الرياضيات الحديثة».

المجموعات

0 ـ المجموعات والدّوال: ـ

نفترض في هذه الدراسة أن للقارىء إلماماً بالمبادىء الأولية الخاصة بالمجموعات والدوال ونذكره هنا في هذا الباب بالنقاط الرئيسة فقط:

1.0 ـ المجموعة:

المجموعة والشيء الرياضي مترادفان، امكانية التعبير عن الأشياء الرياضية بصفة ملموسة كفئة أو مجموعة من أشياء أخرى ليس له أي علاقة بالمشكل الذي يكمن في تعريف المجموعات بصفة رياضية.

2.0 ـ علاقة التساوي:

التساوي بين شيئين رياضيين أ، ب علاقة، بصفة حدسية صحة هذه العلاقة معناه أن الأشياء الملموسة التي «يمثلها» أ وَ ب متطابقة. لا نحاول أن نتعمق في هذا المفهوم. المهم بالنسبة للرياضي هو معرفة استعمال أدواته.

وعلاقة التساوي تحقق الخواص الآتية:

أ) العلاقة س = س محققة من أجل كل س.

ب) العلاقتان: س = ع وَ ع = س متكافئتان مهما تكن س و ع.

جـ) مهما تكن س، ع، ص العلاقتان س = ع و ع = ص تستلزم العلاقة س = ص.

د) اذا كان ق، ر شيئين بحيث ق = ر و ع(س) علاقة تحتوي على الحرف س فإن العلاقتين ع(ق) وَ ع(ر) متكافئتان (العلاقة هنا مأخوذة بمعنى القضية المنطقية).

الخاصية (د) هي احدى البديهيات الرئيسة في الرياضيات

3.0 ـ علاقة الانتماء:

اذا كان أ، ب شيئين رياضيين فإننا نحصل على علاقة بينهما عندما نكتب: أ ∈ ب ونقرأ أ ينتمي الى ب أو أ عنصر من ب.

هنا أيضاً المهم هو تحديد البديهيات التي تحدد استعمال الرمز ∈ هذه البديهيات تتلخص في النظرية الآتية:

إذا كانت س وَ ع مجموعتين، لكي يكون لدينا س = ع يلزم ويكفي أن تكون العلاقتان س ∈ ع، س ∈ س متكافئتين.

4.0 ـ الاحتواء:

العلاقة الآتية:

من أجل كل س، العلاقة س ∈ ل تستلزم العلاقة س ∈ ق تلخص هكذا: ل ⊂ ق ونقول إن ل محتواة في ق.

نظرية:

اذا كانت ع(س) علاقة تحتوي على المتغير س من أجل كل

مجموعة سـ يوجد جزء ل من سـ وجزء واحد يملك الخاصية الآتية:
لكي يكون لدينا س ∈ ل يلزم ويكفي أن تكون العلاقتان:
ع (س) و س ∈ سـ صادقتين.

ونقول إن ل هي مجموعة العناصر س ∈ سـ التي تحقق العلاقة ع (س).

ملاحظة (أ):

إن ل هي الفئة المكونة من العناصر س ∈ سـ التي تملك الخاصة التي تعبر عنها العلاقة ع (س) بحيث أن وجود ل يظهر طبيعياً. ولكننا لا نستطيع أن نبرهن رياضياً على النظرية السابقة إلا باستعمال بديهيات غير بسيطة ونطلب إذن من القارىء أن يتقبل هذه النظرية دون برهان.

ملاحظة (ب):

رغم ما يُوحي به الحدس ليس من الصحيح أنه من أجل كل علاقة ع (س) توجد مجموعة عناصرها كل الأشياء س التي تجعل ع (س) صادقة.

النظرية تقول انه يمكننا أن نحقق ذلك إذا اقتصرنا على الأشياء س التي تنتمي الى مجموعة سـ محددة مسبقاً عدم أخذ هذا النوع من الاحتياط قاد الرياضيين في أواخر القرن السابق الى اكتشاف ما سمي بـ: «تناقضات نظرية المجموعات».

لنأخذ مثلاً العلاقة س ∉ سـ لنفرض أنه توجد مجموعة ل بحيث تكون العلاقتان سـ ∉ ل و س ∉ سـ متكافئتين، اذا عوضنا سـ بالرمز ل نحصل على تكافؤ العلاقة ل ∈ ل ونفيها ل ∉ ل وفي هذا تناقض.

مفهوم مجموعة كل المجموعات (أي المجموعة سـ بحيث س ∈ سـ من أجل كل س) مفهوم متناقض لأننا باستعمال النظرية السابقة يمكننا أن نتكلم عن مجموعة كل العناصر س التي تحقق س ∉ س وهذا محال كما رأينا.

5.0 ـ المجموعة الخالية:

هي المجموعة: سـ ـ سـ = ∅ حيث سـ مجموعة أي المجموعة المعرفة بالعلاقة س ∈ سـ؛ س ∉ سـ بحيث أنه لا يوجد أي عنصر س س ∈ ∅.

المجموعة سـ ـ سـ = ∅ ليست مرتبطة بالمجموعة سـ.
أي أن سـ ـ سـ = ع ـ ع
المجموعة الخالية هي جزء من كل مجموعة.

6.0 ـ المجموعة الأحادية:

اذا كان س شيئاً رياضياً فإنه توجد مجموعة واحدة نرمز لها بالرمز {س} وهي تملك الخاصية الآتية:
العلاقة: ع ∈ {س} تكافىء س = ع.

كل مجموعة من هذا النوع تسمى مجموعة أحادية.

نظرية: ـ

لكي تكون المجموعة سـ أحادية يلزم ويكفي أن يتحقق الشرطان:
أ) سـ ليست خالية.

ب) لدينا س = ع من أجل س ∋ سه وكل ع ∋ سه .

7.0 ـ المجموعة الثنائية : ـ

اذا كان س، ع شيئين رياضيين فإنه توجد مجموعة واحدة يشار إليها بالرمز { س، ع }وعنصرا هذه المجموعة هما س وَ ع فقط أي أن :

ص ∋ { س، ع }.

تكافىء العلاقة ص = س أو ص = ع

كل مجموعة من هذا النوع تُسمّى ثنائية عندما يكون س ≠ ع أما اذا كان س = ع فإن : { س، ع } = { س، س } = { س } مجموعة أحادية .

يمكن بهذه الطريقة تعريف المجموعات ذات ثلاث وأربع . . . عناصر . المجموعات التي نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى المجموعات المنتهية وكل المجموعات الأخرى هي مجموعات لا نهائية .

ملاحظة :

وجود مجموعات ذات عنصر وعنصرين وثلاثة عناصر لا يبرهن عليه أو بعبارة أخرى فإن القضية :

«مهما يكن س وَ ع توجد مجموعة عناصرها الوحيدة هي س وَ ع» بديهية من البديهيات .

كما أن وجود مجموعات منتهية هو أيضاً بديهية من بديهيات الرياضيات .

1 ـ المجموعات غير المنتهية :

اذا نظرنا الى المجموعات فإننا نرى أنها تنقسم الى صنفين . في الصنف الأول مجموعات يمكن تحديد وحصر عناصرها وعد هذه العناصر والانتهاء من هذا العدد .

مجموعة الأعداد الأولية التي هي أصغر من عدد معين، مجموعة سكان الأرض في فترة معينة، مجموعة الذرّات التي تكوّن ماء البحر الأبيض المتوسط كل هذه المجموعات من الصنف الأول وكل واحدة منها تحتوي على عدد منته من العناصر (ربما نجهله) .

في الصنف الثاني نجد مجموعات عدد عناصرها غير منته مثل مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة نقط مستقيم ومجموعة دوائر مستو .

عندما نقول عن مجموعة انها غير منتهية ذلك يعني أنه يمكننا اختيار عنصر من هذه المجموعة ثم عنصر ثان يختلف عن الأول ثم عنصر ثالث . . وبعد كل اختيار تبقى دائمًا عناصر في المجموعة .

اذا كانت لدينا مجموعتان منتهيتان فإنه يمكن لنا مقارنتهما فيما يخص عدد عناصرهما والحكم على أن احداهما تشمل عدداً أكبر من العناصر .

ويمكننا أن نتساءل هل هذه المقارنة يمكننا أن نجريها بالنسبة لمجموعات غير منتهية؟ فهل من المنطقي أن نقول مثلاً ان مجموعة دوائر

مستو تفوق مجموعة الأعداد الطبيعية أو أن مجموعة الأعداد المحصورة بين الصفر والواحد تفوق مجموعة مستقيمات الفضاء... ؟

2 ـ المجموعات المتساوية القدرة:

لمقارنة مجموعتين يمكننا عد عناصر كل منهما، ولا يكون هذا دائماً ممكناً: فعدد ذرات البحر الأبيض المتوسط وإن كان منته لا يمكننا تحديده كما لا يمكننا معرفة عدد سكان الأرض بالضبط في فترة معينة... يمكننا محاولة اقران كل عنصر من المجموعة الأولى بالمجموعة الثانية. فمجموعة الحاضرين في قاعة درس معينة يساوي عددها عدد الكراسي اذا كان كل الحاضرين جالسين ولم يكن هناك أي كرسي لا يجلس عليه أحد.

إقران كل عنصر من مجموعة بعنصر واحد من مجموعة ثانية هو تطبيق وهذا التطبيق يكون تقابلياً عندما تكون العلاقة العكسية أيضاً تطبيقية....

تعريف:

المجموعة س تساوي بالقدرة المجموعة ع اذا وجد تطبيق من س الى ع ونكتب في هذه الحالة : س # ع

3 ـ خواص تساوي القدرة:

أ) كل مجموعة س تساوي بالقدرة نفسها أي أن : س # س

التطبيق س ← س من س الى س الذي يقرن كل عنصر س بنفسه تطبيق تقابلي وينتج منه أن : س # س.

ب) اذا كانت س تساوي بالقدرة ع فإن ع تساوي بالقدرة س
س # ع معناه يوجد تقابل تا : س ← ع التقابل العكسي

تا$^{-1}$: ع ← س يثبت أن ع # س،

جـ) اذا كانت س تساوي بالقدرة ع و ع تساوي بالقدرة ص فإن س تساوي بالقدرة ص.

س # ع معناه أنه يوجد تقابل: تا: س ← ع

ع # ص معناه أنه يوجد تقابل ها : ع ← ص.

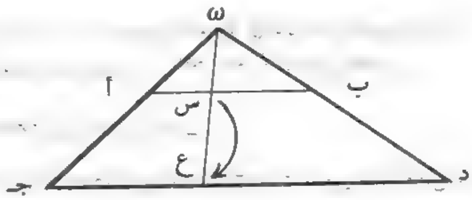
التطبيق المركب هاه تا: س ← ص هو تطبيق تقابلي وينتج عنه أن س # ص

الخاصية (ب) تمكننا من استعمال التعبير «متساويتا القدرة» دون الاشتغال بالترتيب لأنه اذا كانت س تساوي بالقدرة ع فإن ع تساوي بالقدرة س.

4 ـ أمثلة عن مجموعات متساوية القدرة:

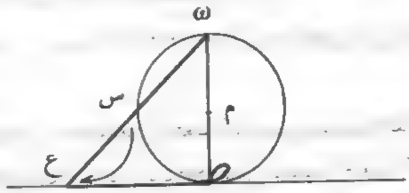
تساوي القدرة مفهوم ينطبق على المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية. اذا كانت المجموعتان س و ع منتهيتين فإن س # ع معناه أن المجموعتين س و ع لهما نفس عدد العناصر.

مثال أول: كل قطعتين مستقيمتين من المستوى متساويتين في القدرة.



التقابل النقطي هو التطبيق المشار إليه في الرسم.

مثال ثان: كل دائرة تساوي بالقدرة مستقيماً.



مثال ثالث: التطبيق ظل: $]-\frac{\pi}{2} ، +\frac{\pi}{2}[\rightarrow$ ح تقابلي لأن الدالة ظل متزايدة تماماً $]-\frac{\pi}{2} ، +\frac{\pi}{2}[$ ومنه نرى أن المجال $]-\frac{\pi}{2} ، +\frac{\pi}{2}[$ يساوي بالقدرة مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

5 ـ المجموعات القابلة للعد:

أبسط المجموعات اللامتناهية هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

ط = {0، 1، 2، 3، ...}

نقول عن مجموعة س أنها قابلة للعد اذا كانت س تساوي بالقدرة

مجموعة الأعداد الطبيعية أي إذا وجد تقابل بين ط و س .

في هذه الحالة يكون ترقيم عناصر المجموعة س وترتيبهم على شكل متتالية :

ح1 ، ح2 ، ح3 ، حن، . . .

ها هي الآن بعض المجموعات القابلة للعد:

1 ـ مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة: {0، 2، 4، 6، ...}

التقابل الموجود بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية هو التقابل المعرف بـ: س ← 2س

2 ـ مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية:

{..., 3 - 2 - 1 - 0, 1, 2, 3, ...}

التقابل بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية نشخصه كما يلي :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

كل عدد سالب ن نرفقه بالعدد الزوجي 2 ن وكل عدد موجب ن نرفقه بالعدد الفردي : 2 ن + 1

فالتطبيق معرف اذن هكذا:

ن ← 2 ن + 1 اذا كانت ن $\geqslant 0$

ن ← 2 |ن| اذا كانت ن < 0

3 ـ مجموعة الأعداد الكسرية قابلة للعد لكي نتحقق من هذا يكفي أن نكتب هذه الأعداد على شكل متتالية لا نهاية لها تحتوي على كل عدد من هذه الأعداد مرة ومرة واحدة فقط سنتخذ الطريقة الآتية :

$\frac{0}{1} ; \frac{1}{1} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{1} ; \frac{1}{3} ; \frac{3}{1} ; \frac{1}{4} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{2} ; \frac{4}{1} ; \frac{1}{5} ; \frac{5}{1}$

نكتب في أول الأمر الأعداد ك/ر بحيث ر + ك = 1 ثم بحيث ر + ك = 2 ثم بحيث ر + ك = 3 الخ...

الفكرة التي تقول ان الاعداد الكسرية لا «تفوق» الاعداد الطبيعية فكرة غير «سليمة» لأول وهلة ولكن الأعمال الرياضية الحديثة أظهرت لنا أنه يلزم ألا تتشبث بهذا النوع من الحدس.

6ـ خواص المجموعات القابلة للعد:

أ ـ كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي مجموعة منتهية أو قابلة للعد.

البرهان:

لتكن سہ مجموعة قابلة للعد وَ ل مجموعة جزئية من سہ لنرَقّم عناصر سہ: ح1 أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، ...، أن ، ... ولتكن من بين هذه العناصر: أن$_1$ ، أن$_2$ ، ... ، ... تنتمي الى ل.

اذا كانت الأعداد: ن$_1$، ن$_2$، ... تملك حداً أكبر فإن ل قابلة للعد ومنتهية.

اذا كان الأمر غير ذلك فإن ل قابلة للعد لأننا استطعنا ترقيم عناصر هذه المجموعة.

(ب) كل اتحاد منته أو قابل للعد هو مجموعة قابلة للعد:

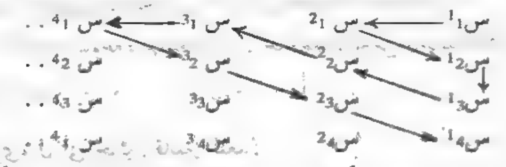
لتكن سہ$_1$ ؛ سہ$_2$ ؛ ... مجموعات قابلة للعد يمكن أن نعتبر هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى فإن لم يكن الأمر هكذا نعوضها بالمجموعات:

سہ$_1$ ، سہ$_2$ ÷ سہ$_1$ ، سہ$_3$ ـ (سہ$_1$ U سہ$_2$) ، ... حيث كل واحدة منها قابلة للعد أو منتهية وحيث اتحادها هو اتحاد: سہ$_1$ و سہ$_2$ ،

يمكن كتابة عناصر المجموعات س$_1$ ، س$_2$ ، ... على شكل جدول لا نهائي

س$_1$1	س$_1$2	س$_1$3	س$_1$4 ...
س$_2$1	س$_2$2	س$_2$3	س$_2$4 ..
س$_3$1	س$_3$2	س$_3$3	س$_3$4 ...
س$_4$1	س$_4$2	س$_4$3	س$_4$4 ...

حيث السطر الأول يمثل عناصر سہ$_1$ والسطر الثاني عناصر سہ$_2$ الخ... لنرقم الآن كل هذه العناصر حسب الترتيب المشار إليه: ـ



إنه لمن الواضح أن كل عنصر يملك بعد هذا الترتيب رقماً أي أن مجموعة هذه العناصر متساوية القدرة مع مجموعة الأعداد الطبيعية وهي المطلوبة.

(جـ) كل مجموعة لا نهائية تحتوي على مجموعة جزئية قابلة للعد:

لتكن سہ مجموعة لا نهائية. لنختر في سہ عنصراً نسميه س$_1$ ثم عنصراً ثانياً س$_2$ يختلف عن س$_1$ ثم عنصراً ثالثاً س$_3$ يختلف عن س$_1$ و س$_2$ الخ... ونستمر في هذا الترقيم دون أن نتوقف لأن سہ مجموعة لا نهائية.

نحصل في الأخير على مجموعة جزئية من سہ:

$ل = \{س_1, س_2, \ldots, س_ن, \ldots\}$ قابلة للعد.

النظرية السابقة تظهر لنا أن «أصغر» المجموعات اللانهائية هي المجموعات القابلة للعد.

7 ـ المجموعات اللانهائية:

نلاحظ من خلال بعض الأمثلة السابقة أن مجموعات لا نهائية متساوية القدرة مع أجزاء لها. فمجموعة الأعداد الطبيعية متساوية القدرة مع مجموعة الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الحقيقية متساوية القدرة مع مجموعة الأعداد المحصورة بين $-\pi$ و π ويمكننا أن نتساءل هل هذه الخاصية صحيحة من أجل كل مجموعة لا نهائية أم لا.

لتكن س مجموعة لا نهائية ولتكن ل مجموعة جزئية من س قابلة للعد:

$ل = \{س_1, س_2, \ldots, س_ن, \ldots\}$.

فلنجزىء ل الى جزئين قابلين للعد:

$ل_1 = \{س_1, س_3, س_5, \ldots\}$

$ل_2 = \{س_2, س_4, س_6, \ldots\}$

ل ، $ل_1$ ، $ل_2$ متساوية في القدرة لأن كل واحدة منها تساوي بالقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية. يوجد إذن تقابل بين ل و $ل_1$ هذا التقابل يمكن تمديده إلى تقابل بين المجموعتين:

$ل \cup (س - ل)$ و $ل_1 \cup (س - ل)$.

ولكن المجموعة الأولى تساوي س والمجموعة الثانية $س - ل_2$ والمجموعة س تساوي بالقدرة الجزء الفعلي : $س - ل_2$.

وعندنا اذن الخاصية الآتية التي يمكن اعتبارها تعريفاً للمجموعة اللانهائية : **كل مجموعة لا نهائية تملك جزءاً فعلياً يساويها بالقدرة.**

8 ـ المجموعات غير القابلة للعد:

قد رأينا فيما سبق بعض المجموعات القابلة للعد مثل مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الكسور. يمكننا أن نتساءل هل توجد مجموعات غير قابلة للعد؟

النظرية الآتية تثبت هذا الوجود:

> **نظرية :** ـ مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 و 1 غير قابلة للعد.

البرهان: ـ

نفرض أن $\{أ_1, أ_2, \ldots, أ_ن, \ldots\}$ مجموعة من الأعداد قابلة للعد ومحصورة بين الصفر والواحد.

يمكن كتابة هذه الأعداد على الشكل الآتي:

$$\begin{cases} أ_1 = 0,س_{11}\,س_{12}\,س_{13}\ldots س_{1ن}\ldots \\ أ_2 = 0,س_{21}\,س_{22}\,س_{23}\ldots س_{2ن}\ldots \\ أ_3 = 0,س_{31}\,س_{32}\,س_{33}\ldots س_{3ن}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ أ_ن = 0,س_{ن1}\,س_{ن2}\,س_{ن3}\ldots س_{نن}\ldots \end{cases} \quad (1)$$

يشير $س_{كو}$ الى الرقم العشري ذي الرتبة ك للعدد أ.

فلننشىء العدد $ب = 0,ع_1\,ع_2\ldots ع_ن\ldots$ بطريقة «قطر كانتور».

نفرض أن ع$_1$ يختلف عن س$_{11}$ وَ ع$_2$ عن س$_{22}$ . .

وبصفة عامة ع$_{ن}$ يختلف عن س$_{نن}$.

العدد ع لا يستطيع أن ينتمي الى المتتالية (1) لأنه يختلف عن العدد أ$_1$ فيما يخص الرقم العشري الأول وهو يختلف عن العدد أ$_2$ فيما يخص الرقم العشري الثاني الخ . . .

ومهما تكن المتتالية التي نختارها فانها لا تستطيع أن تغطي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي الى المجال [1, 0] ومنه فإن هذا المجال غير قابل للعد.

من بين المجموعات التي لا تقبل العد نذكر، مجموعة نقط مستقيم، مجموعة نقط قطعة مستقيمة، مجموعة نقط المستوى، مجموعة نقط كرة أو دائرة، مجموعة الدوال الحقيقية الخ . . .

9 ـ نظرية كانتور ـ بيرنشتان:

> **نظرية :** ـ لتكن سـ و ع مجموعتين كيفيتين . إذا وجد تطبيق تقابلي : تا من سـ نحو جزء ع$_1$ من ع وتطبيق تقابلي : ها من ع نحو جزء سـ$_1$ من سـ فإن المجموعتين سـ و ع متساويتا القدرة .

البرهان: ـ

ليكن س عنصراً كيفياً من سـ . لنفرض أن س = س$_0$ ولنعرف عائلة من العناصر بالطريقة التالية :

لنفرض أن س$_{ن}$ قد عرف . اذا كان ن عدداً زوجياً نأخذ في ع العنصر س$_{ن}$ الذي يحقق العلاقة : تا (س$_{ن+1}$) = س$_{ن}$ عندما يكون عدداً

زوجياً وإذا كان عدداً فردياً نأخذ في سـ العنصر س$_{ن+1}$ بحيث : س$_{ن}$ = ها(س$_{ن+1}$) عندما يوجد هذا العنصر .

عندنا حالتان :

أ) عند الرتبة ك لا نجد عنصراً س$_{ك+1}$ يحقق الشرط المطلوب نقول في هذه الحالة ان العدد ك هو رتبة س.

ب) المتتالية س$_{ن}$ لا نهاية لها . نقول في هذه الحالة ان رتبة العنصر س رتبة لا نهائية .

ـ لنجزىء الآن سـ الى ثلاثة أجزاء :

ـ سـ$_1$ مجموعة العناصر ذوي الرتبة الزوجية .

ـ سـ$_2$ مجموعة العناصر ذوي الرتبة الفردية .

ـ سـ$_3$ مجموعة العناصر ذوي الرتبة اللانهاية .

ولنجزىء ع الى ثلاثة أجزاء مماثلة : ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$

ان اقتصار التطبيق تا على المجموعة سـ$_1$ هو تقابل من سـ$_1$ نحو ع$_2$. كما أن اقتصار هذا التطبيق على سـ$_2$ هو تقابل من سـ$_3$ نحو ع$_3$ ، واقتصار التطبيق ها$^{-1}$ على سـ$_2$ هو تقابل من سـ$_2$ نحو ع$_1$.

فلنعرف الآن التطبيق عا كما يلي :

عا (س) = تا (س) .

> اذا كان العنصر س ينتمي الى المجموعة س$_1$ ∪ سـ$_3$.
> و عا (س) = ها$^{-1}$ (س) اذا كان س عنصر من سـ$_2$.

التطبيق عا تطبيق تقابلي . وهذا مما يبرهن على النظرية .

10 ـ مفهوم العدد الأصلي:

اذا تساوت بالقدرة مجموعتان منتهيتان نقول ان لهما نفس عدد العناصر.

واذا كانت المجموعتان المتساويتا القدرة كيفيتين نقول ان لهما نفس القدرة أو نفس العدد الأصلي.

العدد الأصلي لمجموعة سـ هو شيء رياضي مرتبط بها ونرمز له بالرمز أصلي (سـ) Card (X)

وهو يحقق الشرط:

لتكن المجموعتان سـ و عـ متساويتي القدرة يجب ويكفي أن :

أصلي (سـ) = أصلي (عـ) .

ملاحظة:

لو كانت توجد لدينا مجموعة ل عناصرها كل المجموعات لعرفنا العدد الأصلي للمجموعة سـ صنف سـ حسب علاقة التكافؤ (سـ ~ عـ). ولكننا نعرف أن هذه المجموعة غير موجودة ولا يمكننا أن نعطي هذا النوع من التعريف.

> نقول عن شيء رياضي س انه عدد أصلي اذا وجدت مجموعة سـ بحيث س = أصلي (سـ).

من بين الأعداد الأصلية المعروفة لدينا: 0 وهو أصلي المجموعة الخالية:

0 = أصلي (∅) أو 0 = أصلي ({ })

ثم لدينا الواحد ويعرف هكذا:

1 = أصلي ({ ∅ }) أو 1 = أصلي ({ { } }).

الواحد هو أصلي كل مجموعة أحادية . نقول عن مجموعة سـ أنها أحادية اذا كانت سـ غير خالية وكان لدينا الاستلزام :

(س ∈ سـ و ع ∈ سـ) ⟸ س = ع

الاثنان هو أصلي المجموعة التي عناصرها هي المجموعة الخالية والمجموعة { ∅ } التي تحتوي على العنصر الواحد.

2 = أصلي ({ ∅، { ∅ } }).

الاثنان هو أصلي كل ثنائية . والثنائية هي المجموعة سـ التي تحقق الشرط: يوجد س و ع بحيث :

س ∈ سـ ؛ ع ∈ سـ ، س ≠ ع

وبحيث العلاقة ص ∈ سـ تعني أن

ص = ع أو ص = س

العدد الأصلي لمجموعة الأعداد الطبيعية يسمى قوة القابل للعد ونرمز له بالرمز أصلي (ط) .

العدد الأصلي لمجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين الصفر والواحد يسمى قوة المستمر ونرمز له بالرمز: ω

11 ـ الترتيب والأعداد الأصلية:

اذا كانت سـ و عـ مجموعتين كيفيتين وأصلي سـ أصلي عـ أصلياهما فان أربع حالات تكون ممكنة نظرياً :

أ) س يساوي بالقدرة مجموعة جزئية من ع و ع يساوي بالقدرة مجموعة جزئية من س .

ب) س يساوي بالقدرة مجموعة جزئية من ع ، ع لا يساوي بالقدرة أي مجموعة جزئية من س .

جـ) س لا يساوي بالقدرة أي مجموعة جزئية من ع وع يساوي بالقدرة مجموعة جزئية من س .

د) س لا يساوي بالقدرة أي مجموعة جزئية من ع وع لا يساوي بالقدرة أي مجموعة جزئية من س .

في الحالة الأولى أظهرت لنا نظرية كانتور ـ برنشتاين أن

أصلي س = أصلي ع

في الحالة الثانية نقول ان:

أصلي س < أصلي ع

في الحالة الثالثة نقول ان:

أصلي س > أصلي ع

في الحالة الرابعة لا يمكن مقارنة أصلي س وأصلي ع

ولكن نظرية زرملو Zermelo تظهر لنا أن هذه الحالة غير ممكنة.

نظرية:

> إذا كانت س وع مجموعتين فان احدى القضيتين على الأقل صحيحة
>
> س يساوي بالقدرة جزءاً من ع
>
> ع يساوي بالقدرة جزءاً من س
>
> زيادة على هذا إذا كانت القضيتين صحيحتين في آن واحد فإن: س وع متساويتا القدرة.

(هذه النظرية استعملها كانتور CANTOR في أبحاثه ولكن الجزء الثاني لم يُبرهَن عليه إلا في سنة 1877 من طرف بيرنستاين BERNSTEIN الجزء الأول الذي هو أصعب برهاناً أثبته ZERMELO سنة 1904).

بعد أن رأينا أنه يمكن مقارنة عددين أصليين ورأينا بعض الأعداد الأصلية مثل قوة المعدود وقوة المستمر التي هي أكبر منه يمكننا أن نتساءل: هل يوجد عدد أصلي أكبر من قوة المستمر؟

وإن وجد هل يوجد عدد أصلي أكبر من كل الأعداد الأصلية؟

الجواب عن هذه الأسئلة كامن في النظرية الآتية:

نظرية:

> إذا كانت س مجموعة وج (س) مجموعة أجزاء هذه المجموعة فإن قوة ج (س) أكبر من قوة س

البرهان: ـ

التقابل تا: س ← ج (س) من س نحو ج (س) يظهر لنا أن:

أصلي ج (س) أكبر من أصلي س :

يكفي أن نبرهن على أن قدرة س تختلف عن قدرة ج (س) أي:

أصلي س ≠ أصلي ج (س) .

لنفرض أنه يوجد تقابل $f.X \rightarrow P(X)$ يرفق بكل عنصر من س جزءاً من X.

لتكن ق المجموعة الجزئية من سـ المعرفة كالآتي:

(1) أ ∈ ق ⇐ أ ∉ تا (أ)

ق هي مجموعة العناصر الموجودة خارج صورها.

إن ق عنصر من ج (سـ) لنبرهن أن ق لا يستطيع أن يكون صورة لأي عنصر من سـ بواسطة تا.

لنفرض العكس: أي أنه يوجد عنصر س من سـ بحيث تا (س) = ق. هل ينتمي هذا العنصر س الى ق أم لا؟

اذا كان س ∈ ق فحسب تعريف ق في (1) ان س ∉ تا(س) أي أن س ∉ ق.

اذا كان س ∉ ق فحسب (1). س ∈ تا (س) أي س ∈ ق

العنصر س ينتمي ولا ينتمي في آن واحد الى ق.

وفي هذا الكلام تناقض اذن لا يوجد س بحيث تا (س) = ق.

والتطبيق تا : سـ ← ج (سـ) لا يستطيع أن يكون غامراً أي لا يستطيع أن يكون تقابلاً وتكون لدينا العلاقة :

أصلي سـ ≠ أصلي ج (سـ).

كلما وجدنا عدداً أصلياً فانه يمكن ايجاد عدد أصلي أكبر منه. الأعداد الأصلية ليست محدودة من الأعلى.

عندما تكون المجموعة سـ منتهية فإن عدد عناصر ج (سـ) هو $2^{ن}$ حيث ن هو عدد عناصر سـ.

في الحالة العامة حيث سـ مجموعة كيفية فإنه يرمز الى أصلي ج (سـ) بالرمز $2^{س}$ حيث س هو أصلي سـ.

ولدينا: س < $2^{س}$.

المجموعات المرتبة:

نذكر بأن علاقة الترتيب هي العلاقة التي تحقق الخواص الثلاثة:

- الانعكاس؛ - ضد التناظر؛ - التعدي:

وبصفة أدق اذا كانت ع علاقة معرفة داخل مجموعة سـ فإن ع علاقة ترتيب اذا تحققت الشروط الثلاثة :

1) ∀ س ∈ سـ ، س ع س

2) س ∈ سـ ، س ع ع و ع ع س ⇐ س = ع
ع ∈ سـ

3) س ∈ سـ
ع ∈ سـ ، س ع ع و ع ع ص ⇐ س ع ص
ص ∈ سـ

سنشير الى علاقة الترتيب بالرمز ≼ ولكتابة أ ≼ ب تقرأ أ يسبق ب.

كل مجموعة مزودة بعلاقة ترتيب تسمى مجموعة مرتبة.

يمكن تزويد كل مجموعة بعلاقة ترتيب مثل علاقة... يساوي...

علاقة القسمة في مجموعة الأعداد الطبيعية علاقة ترتيب وكذلك علاقة الاحتواء في مجموعة الأجزاء.

اذا كان لدينا أ ≼ ب مع أ ≠ ب فإننا نكتب أ < ب.

وتقرأ أ تسبق ب فعلاً.

عوض أن تكتب أ < ب يمكن أن نكتب أ < ب ونقرأ ب يتبع أ.

كل مجموعة مرتبة سـ يتحقق فيها الشرط الآتي:
من أجل كل أ ∈ سـ وكل ب ∈ سـ يوجد جـ ∈ سـ بحيث:
جـ ≥ أ و جـ ≥ ب تسمى مجموعة مصفية من اليمين.

13 ـ التطبيقات التي تحفظ بالترتيب:

اذا كانت سـ و X مجموعتين وتا تطبيقا من سـ نحو X فإن تا تحافظ على الترتيب اذا كان لدينا:

أ ∈ سـ ، ب ∈ سـ   أ ≤ ب ⇐ تا (أ) ≤ تا (ب).

نقول ان تا تشاكل تقابلي للمجموعتين المرتبتين سـ ، سـ
إذا: (1) كانت تا تطبيقاً تقابلياً.
(2) تحقق الشرط:

س ∈ سـ ، ع ∈ سـ   س ≤ ع ⇐ تا (س) ≤ تا (ع)

14 ـ الترتيب الجزئي والترتيب الكلي: ـ

اذا كان س و ع عنصرين من مجموعة جزئية مرتبة ولم يكن لا س ≤ ع ولا ع ≤ س فإننا نقول ان العنصرين س و ع غير قابلين للمقارنة.
الترتيب الذي توجد فيه عناصر غير قابلة للمقارنة يسمى ترتيبا جزئيا والمجموعة التي عرف عليها هذا الترتيب تسمى مجموعة جزئية مرتبة ترتيباً جزئياً.

الترتيب الذي لا توجد فيه عناصر قابلة للمقارنة يسمى ترتيباً كلياً والمجموعة التي عرف عليها هذا الترتيب تسمى مجموعة مرتبة كلياً.

علاقة الترتيب العادية «... أصغر من...» ترتب مجموعة الأعداد الطبيعية ترتيباً كلياً، بينما العلاقة «... يقسم...» لا ترتبها

إلا ترتيباً جزئياً فالعنصران 2 و3 مثلاً غير قابلين للمقارنة حسب العلاقة الثانية لأن 2 لا تقسم 3 و3 لا تقسم 2.

15 ـ النوع الترتيبي: ـ

عندما تكون المجموعتان سـ وع مرتبتين ومتشاكلتين تقابلياً، نقول ان لهما نفس النوع الترتيبي.

ان النوع الترتيبي هو الشيء المشترك بين المجموعات المرتبة المتشاكلة تقابلياً مثل العدد الأصلي الذي هو الشيء المشترك بين المجموعات المتساوية القدرة.

كل مجموعتين تملك نفس النوع الترتيبي لهما نفس العدد الأصلي لأنهما متشاكلتان تقابلياً ويوجد إذاً بينهما تقابل.

يمكننا أن نتكلم عن العدد الأصلي المرفق بنوع ترتيبي معين، ولكن العكس غير صحيح.

يمكن ترتيب مجموعة سـ ذات عدد أصلي معين بصفات مختلفة حيث لا يوجد تشاكل تقابلي بين سـ مرتبة حسب الترتيب الأول وسـ مرتبة حسب الترتيب الثاني.

ففي مجموعة الأعداد الطبيعية علاوة على الترتيب العادي يمكن أن نعرف الترتيب:

1, 3, 5, 7, ..., 2, 4, 6, ...

حيث كل عدد فردي يسبق كل عدد زوجي وحيث الأعداد الفردية والزوجية مرتبة على حدة بالطريقة العادية.

نوع هذا الترتيب يختلف عن نوع الترتيب العادي.

16 ـ الجمع الترتيبي

لتكن س و ع مجموعتين مرتبتين كلياً منفصلتين ذات النوع الترتيبي أ و ب.

في المجموعة س ∪ ع نعرف الترتيب الكلي الآتي :

ـ كل عنصر من س يسبق كل عنصر من ع .

ـ الترتيب في س وفي ع لا يتغير.

المجموعة المرتبة كلياً حسب هذا الترتيب تسمى المجموع الترتيبي ويرمز إليها بالرمز س + ع

إن الجمع الترتيبي س + ع يختلف في الحالة العامة عن الجمع الترتيبي ع + س . النوع الترتيبي لـ : س + ع يسمى المجموع الترتيبي للنوعين أ و ب يرمز إليه بالرمز (أ+ ب) .

17 ـ الترتيب الجيد:

لقد عرفنا الترتيب ثم الترتيب الكلي سنعرف الآن نوعاً آخر من الترتيب وهو الترتيب الجيد.

تعريف : ـ نقول عن مجموعة س مرتبة ترتيباً كلياً انها مرتبة ترتيباً جيداً اذا تحقق الشرط الاتي:

كل مجموعة جزئية من س، غير خالية تملك عنصراً يسبق كل عناصرها.

المجموعة [0, 1] مرتبة ترتيباً كلياً (الترتيب العادي) ولكنها ليست

مرتبة ترتيباً جيداً لأن مجموعة الأعداد الناطقة المحصورة بين الصفر والواحد باستثناء الصفر لا تملك حداً أدنى ينتمي إليها.

كل مجموعة منتهية مرتبة ترتيباً كلياً هي مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً.

كل مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مرتبة جيداً هي مجموعة مرتبة جيداً.

18 ـ العدد الترتيبي

النوع الترتيبي لمجموعة مرتبة ترتيباً جيداً يسمى عدداً ترتيبياً.

مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة ترتيباً جيداً ولذا فإن نوعها الترتيبي عدد ترتيبي.

مجموعة الأعداد الصحيحة {..., 2-, 1-, 0, 1, 2, ...} غير مرتبة ترتيباً جيداً لأن مثلا جزء الأعداد السالبة لا يملك حداً أدنى.

النوع الترتيبي لمجموعة الأعداد الصحيحة ليس عدداً ترتيبياً.

نظرية: ـ الجمع الترتيبي لعدد منته من المجموعات المرتبة ترتيباً جيداً هو مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً.

البرهان:

لنفرض أن أ مجموعة جزئية من المجموع الترتيبي

$أ_1 + أ_2 + \dots + أ_ن$.

لـ ن مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً لتكن $أ_ك$ أول المجموعات التي تحتوي على عناصر من أ.

المجموعة أ أو جزء من المجموعة المرتبة جيداً أ$_{0}$ وتملك اذن عنصراً أدنى، هذا العنصر هو أيضاً أدنى العناصر في أ حسب تعريف الجمع الترتيبي.

نظرية: المجموع الترتيبي لعدة أعداد ترتيبية هو عدد ترتيبي

هذه النظرية تنتج من النظرية السابقة مباشرة .

19 ـ الجداء الترتيبي:

مثلما عرّفنا الجمع الترتيبي لمجموعتين يمكننا أنْ نعرّف الجداء الترتيبي لمجموعتين لتكن سـ ، ع مجموعتين و سـ . ع جداءهما . نعرف علاقة ترتيب في سـ ع بالطريقة التالية:

ع$_{1}$ < ع$_{2}$ عندما تكون (س$_{1}$ ، ع$_{1}$) < (س$_{2}$ ، ع$_{2}$) .

س$_{1}$ < س$_{2}$ عندما تكون (س$_{1}$ ، ع) < (س$_{2}$ ، ع)

الجداء الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة ع مرفق بعلاقة الترتيب المشار إليها يسمى الجداء الديكارتي لـ سـ و ع ويرمز إليه بالرمز سـ . ع .

نوع الترتيب المرفق بالجداء سـ . ع يسمى جداء نوعي الترتيب المرفقين بـ سـ و ع .

نعطي الآن النظريتين التاليتين: ـ

نظرية: ـ الجداء الترتيبي لمجموعتين مرتبتين ترتيباً جيداً هو مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً.

البرهان:

لتكن ل مجموعة جزئية من المجموعة سـ . ع، ل مجموعة أزواج (أ، ب) لنعتبر كل المساقط الثانية ب من هذه الأزواج انها تمثل مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة جيداً ع فهي تملك عنصراً يسبق كل العناصر نسمي هذا العنصر ب$_{0}$.

لنعتبر الآن كل الأزواج (أ، ب$_{0}$) التي تنتمي الى ل المساقط الأولى أ تنتمي الى مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة جيداً سـ فهي تملك اذن عنصراً يسبق كل العناصر نسمي أ$_{0}$ هذا العنصر.

الزوج (أ$_{0}$، ب$_{0}$) هو أصغر عناصر ل والمجموعة مرتبة ترتيباً جيداً.

نظرية : ـ
جداء عدة أعداد ترتيبية هو عدد ترتيبي.

هذه النظرية ناتجة عن النظرية السابقة.

20 ـ مقارنة الأعداد الترتيبية: ـ

لمقارنة الأعداد الترتيبية نعطي التعاريف الآتية:

اذا كانت سـ مجموعة مرتبة ترتيباً كلياً وس عنصراً منها فإن س يعرف مجموعتين مجموعة العناصر الأصغر من س ونسميها الشطر المبتدىء ومجموعة العناصر التي هي أكبر أو تساوي س ونسميها الشطر المنتهي (Section Commençante, finissante).

ليكن أ ، ب عددين ترتيبيين و سـ ، ع مجموعتين ذات النوع الترتيبي أ ، ب .

نقول إن أ = ب إذا كانت المجموعتان سـ ، ع متشكالتان تقابلياً .

نقول إن أ < ب اذا كانت سـ تشاكل تقابلياً شطراً مبتدئاً من ع .

ونقول إن أ > ب اذا كانت ع تشاكل تقابلياً شطراً مبتدئاً من سـ .

نظرية: ـ اذا كان أ، ب عددين ترتيبيين

فإن احدى الحالات وإحداها فقط ممكنة.
إما أ = ب؛ إما أ < ب ؛ إما أ > ب.

لا نبرهن على هذه النظرية هنا.

لكل عدد ترتيبي عدد أصلي معين ومقارنة الأعداد الترتيبية ينتج عنها مقارنة الأعداد الأصلية.

إذا كانت سـ ، ع مجموعتين مرتبتين ترتيباً جيداً فإن سـ و ع إما متساويتا القدرة وإما قدرة احداهما أكبر من الأخرى .

21 ـ بديهية الاختيار ونظرية زرملُو ZERMELO

مقارنة المجموعات المرتبة ترتيباً جيداً حسب اعدادها الأصلية تجعلنا نتساءل: هل يمكن أن نجعل كل مجموعة مرتبة ترتيباً جيداً؟

الجواب الايجابي عن هذا السؤال يجعل مقارنة أصْليّ مجموعتين كيفيتين ممكناً دوماً.

إن زرملو Zermelo هو الذي برهن على أن كل مجموعة يمكن ترتيبها ترتيباً جيداً.

البرهان على هذه النظرية متركز على بديهية تسمى بديهية الاختيار.

بديهية الاختيار:

لتكن سـ مجموعة دلالات أ نرفق بكل دليل أ مجموعة كيفية قأ.
بديهية الاختيار تقول انه يمكننا أن نعرف على سـ دالة تا تقرن بكل عنصر أ ∈ سـ عنصراً لأ من المجموعة قأ. أو بصفة أخرى يمكن أن تُكَوِّن مجموعة اذا اخترنا في كل قأ عنصراً وعنصراً واحداً فقط.

ملاحظة :.

ان نظرية المجموعات التي نتناولها هنا والتي هي مستمرة من أعمال كانتور وزرملو تمثل بما يسمى بالنظرية الساذجة للمجموعات .

إن بديهية الاختيار التي تسمى أيضاً بديهية زرملو قد كانت السبب في مناقشات حادة وجدال بين الرياضيين نتجت عنه أعمال كثيرة في ميدان المنطق الرياضي ونظريات شكلية مبنية على بديهيات معينة وها هي الآن بعض النظريات التي تكافىء بديهية الاختيار أي أن هذه النظريات يُبرهن عليها بواسطة بديهية الاختيار وتقبُّلُ هذه النظريات يُمكِّننا من الاستغناء عن بديهية الإختيار .

(1) ان نظرية زرملو نفسها مكافئة لبديهية الاختيار فبالفعل اذا فرضنا أن كل مجموعة قأ مرتّبة جيداً.

لكي ننشىء الدالة تا المشار إليها في البديهية يكفي أن نأخذ في كل قأ أصغر العناصر.

لنعطي الآن التعريف الآتي:

لتكن سـ مجموعة مرتبة، كل مجموعة جزئية أ من سـ مرتبة ترتيباً كلياً حسب الترتيب المعرف في سـ ، تسمى سلسلة .

نقول عن سلسلة انها عظمى اذا لم تكن محتواة كجزء فعلي في سلسلة أخرى من سـ .

في المجموعة المرتبة سـ، العنصر أ حادٌ للمجموعة الجزئية ق اذا كان كل عنصر من ق يسبق أ .

نظرية هاوسدورف

في مجموعة مرتبة، كل سلسلة محتواة في سلسلة عظمى.

نظرية زورن :

اذا كانت كل سلسلة من مجموعة سـ مرتبة تقبل حادا ، فإن كل عنصر من سـ يسبق عنصراً أعظم .

22 ـ هامش حول الأعداد الطبيعية وما لا نهاية:ـ

تعريف المجموعة المنتهية يمكنه أن ينتج عن النظرية الآتية:

نظرية : ـ لتكن سـ مجموعة، الخواص الآتية متكافئة :

أ) المجموعة الوحيدة التي تساوي بالقدرة المجموعة سـ هي سـ نفسها .

ب) لدينا: أصلي (سـ) ≠ أصلي (سـ) + 1 .

البرهان : ـ

لنفرض أن سـ يساوي بالقدرة مجموعة سـ' محتواة تماماً في سـ لدينا : ـ

سـ = سـ' ∪ (سـ ـ سـ')

بما أن المجموعتين سـ' و (سـ ـ سـ') منفصلتين

أصلي (سـ) = أصلي (سـ') + أصلي (سـ ـ سـ') = أصلي (سـ) + أصلي (سـ ـ سـ')

المجموعة (سـ ـ سـ') غير خالية ومنه أصلي (سـ ـ سـ') ≥ 1 .

ونحصل على : أصلي (سـ) ≥ أصلي (سـ) + 1 ≥ أصلي (سـ) .

وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين جزء من سـ والمجموعة التي أصلها : أصلي (سـ) + 1 وتقابل بين سـ وجزء من هذه أي أنه يوجد تقابل بين سـ وهذه المجموعة .

أي أن: أصلي (سـ) = أصلي (سـ) + 1.

وبالعكس لنفرض أن:

أصلي (سـ) = أصلي (سـ) + 1.

ليكن أ شيئاً لا ينتمي الى سـ .

يوجد حسب المساواة السابقة تطبيق تا يُطبق

سـ ∪ { أ }

على : سـ.

صورة المجموعة X بواسطة التطبيق تا محتواة تماماً في سـ وهي تساوي بالقدرة X.

نفي (أ) ونفي (ب) متكافئتان.

ينتج عن هذا أن (أ) و(ب) متكافئتان.

نقول عن مجموعة، أنها منتهية اذا حققت الشرطين السابقين، وهي غير منتهية فيما عدى ذلك.

كما نقول عن عدد أصلي سـ أنه منته اذا حقق الشرط:
س ≠ س + 1 وهو لا نهائي عندما: س = س + 1
كل عدد أصلي منته يسمى عدد طبيعي.
كل عدد طبيعي هو عدد أصلي لمجموعة من النوع:
∅ ؛ {∅} ، {∅، {∅}}، {∅، {∅}، {∅، {∅}}}...

المشكل المطروح هو: هل هذه العناصر تكون مجموعة؟

نظرية: توجد مجموعة وحيدة ط بحيث العلاقة

س ∈ ط تكافىء العلاقة: س عدد طبيعي المجموعة ط مجموعة لا نهائية.

وحدانية ط تنتج عما يلي: إذا فرضنا أن هناك مجموعة ثانية ط' بحيث س ∈ ط' يكافىء «س عدد طبيعي» فإننا نحصل على التكافؤ بين س ∈ ط و س ∈ ط' ومنه : ط = ط'. وجود ط ينتج عن النظرية الآتية: اذا كانت سـ مجموعة لا نهائية فإن كل مجموعة منتهية متساوية القدرة مع جزء من سـ.

اذا كان أ عدداً رئيسياً لا نهائياً، كل عدد طبيعي س يحقق العلاقة س < أ.

يلزم أن نبرهن على أن الأعداد س التي تحقق العلاقة س < أ تكون مجموعة، سنقبل هذه النتيجة.

وأخيراً نفرض أن ط منتهية، من أجل كل ن ∈ ط نختار مجموعة سـن بحيث أصلي (سـن) = ن وبما أن ط وكل سـن مجموعة منتهية فإن المجموعة المعروفة كالآتي : سـ = ∪ن∈ط سـن.

أيضاً منتهية وبما أن كل سـن محتواة في سـ نرى أنه اذا كان ط منته فإنه يوجد عدد طبيعي يساوي أصلي (سـ) بحيث ن ≤ س من أجل كل عدد منته ن.

ولكن س عدد منته وأيضاً س + 1 اذن لدينا: س ≤ س + 1 وأيضاً س + 1 ≤ س ومنه س = س + 1 وهذا مما يناقض كون س منته.

ونرى من خلال ما سبق أن القضيتين:

- وجود مجموعة لا نهائية.
- ووجود مجموعة عناصرها هي الأعداد الطبيعية

متكافئتان.

لمحة تاريخية حول نشأة
نظرية المجموعات

1 ـ نظرية المجموعات

يمكننا القول ان الرياضيين والفلاسفة استعملوا بصفة لا شعورية براهين من نظرية المجموعات.

ولكن يلزمنا أن نفرق بين المسائل التي لا تحتوي إلا على مفاهيم الانتماء والاحتواء والمسائل التي تحتوي على مفهوم اللانهاية أو فكرة العدد الأصلي.

فالمسائل الأولى التي هي أكثر حدساً لم تثر أي مشكل جوهري.

حتى القرن التاسع عشر كان الرياضيون يتكلمون عن مجموعة الأشياء التي تملك صفة معينة، ولم ينقد أحد العالم كانتور عندما صرح بالتعريف المشهور: ـ

«بمجموعة نقصد التجمع الكلي لأشياء متباينة من حدسنا أو فكرنا».

2 ـ صعوبات اللانهاية

ولكن الأمور تختلف عندما يمتزج مفهوم المجموعة بمفهوم العدد.

إن نظرية التجْزيئي غير المنتهي لكمية أو مساحة قد أثارت منذ البيثاغوريين الأوائل مشاكل فلسفية عويصة: كل الرياضيين الفلاسفة

واجهوا (وبدون الوصول الى أي نتيجة) مسألة تجزيئي كمية محدودة مكونة من عدد غير منتهٍ من النقط.

ولا يهمنا أن نعيد النظر في النقاش الطويل والفلسفي الذي رافق هذه المشاكل، فلننظر فقط الى الموقف الذي اتخذه الرياضيون ازاء هذا النوع من القضايا وذلك منذ أقدم العصور.

يتلخص الموقف أساساً في رفض الجدال عندما لا يمكن الفصل بصفة جلية: فالرياضيون الكلاسيكيون يمتنعون في عملهم عن إدخال «اللانهائي الحالي» (أي المجموعات التي تحتوي على عدد غير منته من أشياء موجودة بصفة آنية).

ويكتفون باللانهائي الممكن أي بامكانية تكبير كل كمية معينة (أو تصغيرها عندما تخص المسألة قضية التناهي في الصغر).

هذا الموقف يحمل معه كثيراً من التملق ولكنه مكّن من تقدم جزء كبير من الرياضيات الكلاسيكية وظهر كحاجز لتجنب كل المناقشات التي أثارها «مفهوم اللانهائي» الحالي.

ظهرت فكرة أولى عن المفهوم العام لتساوي القدرة عند: «قاليلي» لقد لاحظ هذا العالم أن التطبيق $ن \rightarrow ن^2$ يكون تقابلاً عنصراً لعنصر بين الأعداد الطبيعية (التي تكون مجموعة غير منتهية). وبين مربعاتها (وهي أيضاً غير منتهية) وأن البديهية: «الكلُّ أكبر من الجزء» لا يمكنها أن تطبق على المجموعات غير المنتهية.

ولكن هذه الملاحظة عوض أن تكون نقطة انطلاق لدراسة جدية وفعلية للمجموعات اللامنتهية فإنها زادت من تخوف الرياضيين أمام

«اللانهائي الحالي». هذا ما توصل إليه «ڤاليلي» وقد وافقه في رأيه «كوشي» في سنة 1833.

إن حاجيات التحليل (وخاصة الدراسة المعمقة للدوال ذات المتغير الحقيقي التي تستمر طوال كل القرن التاسع عشر) هي التي كانت السبب في انطلاق النظرية الحديثة للمجموعات.

يبرهن «بولزانو» في سنة 1817 عن وجود حد أدنى لمجموعة محدودة من الأسفل في ح. ولكنه ما زال يفكر مثل الرياضيين في ذلك الوقت، إنه لا يتكلم عن مجموعة كيفية من الأعداد الحقيقية ولكنه يذكر خاصة من خواص الأعداد.

بعد ثلاثين سنة، في كتاب نشر سنة 1851، يتكلم «بولزانو» عن «اللانهائي الحالي» وعن مجموعة كيفية، ويُعَرِّف في عمله هذا المفهوم العام لتساوي القدرة بين مجموعتين ويبرهن أن مجالين متراصّين من ح متساويين في القدرة، ويلاحظ أن الفرق الأساسي بين مجموعة منتهية ومجموعة غير منتهية يكمن في كون المجموعة غير المنتهية ق متساوية القدرة مع مجموعة جزئية تختلف عن ق. ولكنه لا يعطي أي برهان مقنع لهذا التصريح.

3- التوصل الى نظرية المجموعات:

ان «جورج كانتور» هو الذي اخترع نظرية المجموعات كما نفهمها اليوم.

ينطلق كانتور من التحليل ومن أبحاثه حول المتواليات المثلثية. تقوده أبحاثه الى الاهتمام بمشاكل تساوي القدرة. وفي سنة 1873

يلاحظ أن مجموعة الأعداد الناطقة قابلة للعد. وفي مراسلة له مع «ديدكيند» نراه يتساءل حول امكانية تساوي القدرة بين مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الحقيقية (هذا المشكل سيحله فيما بعد مظهراً أن المجموعتين غير متساويتي القدرة). ثم ابتداء من سنة 1876 يشتغل «كانتور» بمسائل البعد ويبحث مدة ثلاث سنوات عن عدم امكانية وجود تقابل بين ح وَ $ح^{ن}$ (ن > 1). الى أن يعثر وهو مدهوش على هذا التقابل.

بعد وجود هذه النتائج الجديدة والمدهشة يتفرغ كانتور الى دراسة نظرية المجموعات ويتعرض ما بين سنة 1878 وسنة 1884 الى دراسة مشاكل تساوي القدرة ونظرية المجموعات المرتبة كلياً والخواص التوبولوجية لـ ح و $ح^{ن}$ ومشاكل القياس.

هذه المفاهيم الجديدة التي تؤدي الى نتائج غير متوقعة والتي هي متناقضة في الظاهر لن يتقبلها بسهولة علماء ذلك الوقت. إن «فايرشتراس» هو الرياضي الوحيد الذي يتابع في المانيا أعمال «كانتور» باهتمام. ويعارض الرياضيان المشهوران «شوارتز» و«كرونيكر» هذه الأعمال.

4- أعمال ديدكيند:

تابع ديدكيند من الأول أعمال «كانتور» باهتمام متزايد ولكن بينما كان هذا الأخير منكباً على دراسة وتصنيف المجموعات غير المنتهية، كان «ديدكيند» يفكر في مفهوم العدد (وقد قادته أفكاره قبل هذا الى تعريف الأعداد الصماء بواسطة الانقطاعات).

في سنة 1888 يظهر ديدكيند أن مفهوم العدد الطبيعي (الذي كانت

ترتكز عليه كل الرياضيات الكلاسيكية) يمكن اشتقاقه من مفاهيم أساسية لنظرية المجموعات ثم يدرس الخواص الأولية للتطبيقات من مجموعة نحو أخرى ويعطي التعريف الآتي للمجموعة غير المنتهية:
«ع مجموعة غير منتهية اذا وجد تطبيق تقابلي تـا من ع نحو ع بحيث تا (ع) $\neq$ ع».

ومن زاوية أخرى فإن اهتمام «ديدكيند» بالحساب يقوده الى النظر في المجموعات المرتبة نظرة أشمل من نظرة «كانتور».

5ـ جنة كانتور:

ولكن أعمال «ديدكيند» لم ترع الاهتمام في وقتها مثل أعمال «كانتور» وذلك لأن أعمال «ديدكيند» كانت بناء محكمًا ولكن بدون تطبيق مباشر بينما أدت نتائج أعمال «كانتور» الى تطبيقات عديدة في مجالات مختلفة من بينها التحليل التقليدي.

وفي نهاية القرن التاسع عشر تنتصر أفكار «كانتور» بصفة نهائية. وفي العالمي للرياضيين بزوريخ 1897 يظهر «هادمار» التطبيقات الهامة لأعمال كانتور في ميدان التحليل.

وتحمس «هيلبارت» لهذه الأعمال حتى انه قال: ـ
«من الجنة التي خلقها لنا كانتور لن يخرجنا منها أحد».

6ـ هوامش:

● جورج كانتور G- CANTOR (1918-1845)

ولد في « سانت بطرسبورغ» من والدين ألمانيين . درس كانتور في زيوريخ ثم في برلين حيث كان ڤاير شتراس أحد أساتذته .
درس كانتور في جامعة هال إبتداء من سنة 1869 .
في عام 1890 أسس جمعية الرياضيين الألمان وكان أول رئيس لها .

● لوي كوشي L.CAUCHY (1857-1781)

ولد في مدينة « سو » بفرنسا . درس في المدرسة المتعددة التقنيات . ثم في كلية العلوم بباريس ثم في الكوليج دي فرانس .

● برنار بولزانو B.BOL ZANO (1841-1781)

ولد في « براغ » بتشكسلوفاكيا . درس العلوم الدينية والرياضيات في هذه المدينة . درس فلسفة الديانات وترك الجامعة سنة 1819 من أجل أفكاره .

● كارل تيودور ڤاير شتراس K.T. Weierstrass (1897 – 1825)

ولد في « استعلو » بألمانيا . درس في « بون » و« منستر » . درس في الثانوي ثم في معهد الصناعات ببرلين ثم في جامعة « برلين » وكان عضواً في أكاديمية برلين منذ سنة 1856 .

● ليوبولد كرونيكير L.KRONECKER (1891-1823)

ولد في « لينيتز » بألمانيا . درس في « برلين » و« بون » وحصل على الدكتوراه سنة 1845 في برلين. كان عضواً في أكاديمية العلوم

● جوليوس ريشارد ديدكيند J.R. DEEDKIND (1916 - 1831)

ولد في « برونشويك » درس في جامعة « فوتنفي » كان أستاذاً بالمدرسة المتعددة التقنيات بـ « زيوريخ »

● دافيد هيلبرت D. hilbert (1943-1862)

ولد في « كِنِغْسْبِرْغ » ودرس من سنة 1880 إلى سنة 1884 سافر إلى « لايبيڤ » و« باريس » كان أستاذاً بجامعة « فوتنفي » .

فهرس